PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - MAI XUÂN ĐÔNG - LÊ NGỌC HẢI - TRẦN QUANG TIẾN

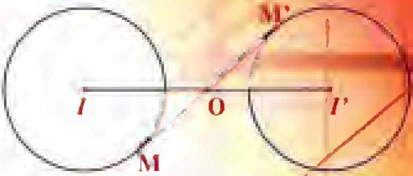
Hướng dẫn

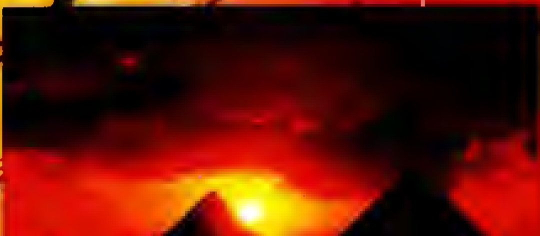
GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11

(CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO)

(Tái bản lần thứ hai)

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản
- Câu hỏi trắc nghiệm





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI – MAI XUÂN ĐÔNG – LÊ NGỌC HẢI – TRẦN QUANG TIẾN

Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC 11

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ hai)

- TÓM TẮT LÝ THUYẾT
- BÀI TẬP CĂN BẢN
- CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "**HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11 NÂNG CAO**" có nội dung tương ứng với sách giáo khoa Hình học 11 nâng cao được áp dụng từ năm 2007 – 2008.

Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần:

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập căn bản

III. Câu hỏi trắc nghiệm

IV. Đáp án.

Phần I: Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của sách giáo khoa mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II: Trình bày lời giải chi tiết của các bài tập có trong sách giáo khoa, mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lý, các tính chất đã học.

Phần III: Trình bày các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp các em ôn luyện lại kiến thức đã học.

Phần IV: Trình bày đáp án các câu hỏi trắc nghiệm nêu ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập có trong sách giáo khoa, nếu gặp khó khăn, có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của sách giáo khoa, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các câu hỏi trắc nghiệm ở phần III để củng cố kiến thức.

Hy vọng cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt Hình học 11 nâng cao.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập trong SGK.

Chúc các em thành công

CÁC TÁC GIẢ

CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Phép biến hình là quy tắc để với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

2. Kí hiệu và thuật ngữ

Nếu ta kí hiệu phép biến hình là F và điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết M' = F(M), hoặc F(M) = M'. Khi đó ta còn nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'.

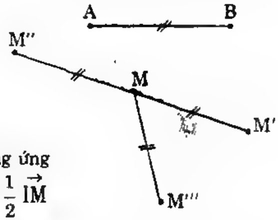
Nếu H là một hình nào đó thì hình H' gồm các điểm M' là ảnh của các điểm M thuộc H được gọi là ảnh của H qua phép biến hình F, và viết H' = F(H).

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho hai điểm cố định A và B. Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho MM' = AB có phải là một phép biến hình không? Tại sao?

Giải

Quy tắc trên không phải là phép biến hình vì với mỗi điểm M ta có thể xác định được nhiều hơn một điểm M' sao cho MM' = AB, trái với định nghĩa của phép biến hình.



Bài 2. Cho điểm I cố định. Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho: $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$ có phải là một phép biến hình không? Tại sao?

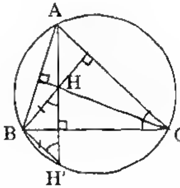
Giải

Quy tắc trên cho ta một phép biến hình vì $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$ nên với điểm M đã cho thì vectơ $\overrightarrow{IM}$ là cố định, do đó ta tìm được duy nhất điểm M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$.

Vậy theo định nghĩa phép biến hình thì quy tắc trên cho ta một phép biến hình.

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Xét phép biến hình F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho: Nếu M thuộc đường thẳng BC thì M' trùng với M, nếu M không thuộc đường thẳng BC thì đường thẳng BC là đường trung trực của đoạn MM'. Tìm ảnh của H qua phép biến hình F.

Giải



Gọi H' là giao điểm của AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (hình bên). Khi đó: $\widehat{ACB} = \widehat{BHH'}$ (1)

(góc có các cạnh tương ứng vuông góc)

$\widehat{ACB} = \widehat{BH'H}$ (2) (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$).

Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{BHH'} = \widehat{BH'H}$ suy ra tam giác BHH' cân tại B. Do đó BH = BH' (3);

Mặt khác $HH' \perp BC$ (4)

Do đó từ (3) và (4) ta có BC là đường trung trực của đoạn HH', hay H' là ảnh của H qua phép biến hình F.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho vectơ $\vec{a}$ có $|\vec{a}| = 3$, phép biến hình F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$. Độ dài đoạn thẳng MM' là:

(A) 0; (B) 1,5; (C) 3; (D) 6.

Câu 2. Ảnh của một điểm qua một phép biến hình là:

(A) 1 điểm; (B) 2 điểm; (C) 3 điểm; (D) 4 điểm.

Câu 3. Trong các quy tắc sau đây, quy tắc nào là một phép biến hình?

(A) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MM'}$ (tam giác ABC cố định cho trước);

(B) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho MM' // d cho trước;

(C) Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho MM' = 2;

(D) Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{AB} = 0$ (với A, B là hai điểm cho trước).

Câu 4. Trong các quy tắc đặt tương ứng sau đây, quy tắc nào không phải là một phép biến hình?

(A) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho điểm I cố định cho trước là trung điểm của MM';

(B) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$ (O là điểm cố định cho trước);

(C) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = (3; -2)$;

(D) Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' là hình chiếu của M lên đường thẳng d cho trước

Câu 5. Cho phép biến hình F biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ cho trước, gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép biến hình F. Nếu AB = 4 thì độ dài đoạn A'B' là:

(A) 2; **(B)** 4; **(C)** 6; **(D)** 8.

IV. Đáp án

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(A)	(A)	(B)

§2. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là phép biến hình, biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ được kí hiệu là T hoặc $T_{\vec{u}}$.

2. Tính chất của phép tịnh tiến

a) Định lý 1: Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì M'N' = MN

b) Định lý 2: Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

c) Hệ quả: Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

3. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, có $\vec{u} = (a; b)$. Giả sử điểm M(x; y) biến thành điểm M'(x'; y'), khi đó:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Công thức trên gọi là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (a; b)$

4. **Phép dời hình**

a) Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

b) Định lý: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, biến góc thành góc bằng nó.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 4. Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì: d trùng với d'? d song song với d'? d cắt d'?

Giải

d trùng với d' khi $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của d.

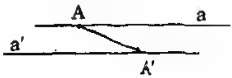
Thật vậy: xét điểm M thuộc d, gọi điểm M' là ảnh của M qua $T_{\vec{u}}$, khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, suy ra các đường thẳng MM' và d có cùng vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và cùng đi qua điểm M nên chúng trùng nhau, vì vậy $M' \in d$, tức là d' trùng với d. Tương tự ta có d // d' khi giá của $\vec{u}$ không song song với d. Không có trường hợp nào để d cắt d'.

Bài 5. Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.

Giải

Gọi A, A' lần lượt là hai điểm bất kỳ thuộc a và a'. Khi đó mọi phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ đều biến a thành a'.

Ngược lại nếu có $\vec{u}$ mà $T_{\vec{u}}(a) = a'$, khi đó lấy A là điểm bất kỳ trên a, gọi A' là ảnh của A qua phép $T_{\vec{u}}$ thì $A' \in a'$ và $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.



Tóm lại: Ngoài tất cả các phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA'}$ (với A, A' là các điểm bất kỳ lần lượt thuộc a, a') biến a thành a' thì không còn phép tịnh tiến nào khác biến a thành a'.

Bài 6. Cho hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$. Với điểm M bất kỳ, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành điểm M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến M thành M'' là một phép tịnh tiến.

Giải

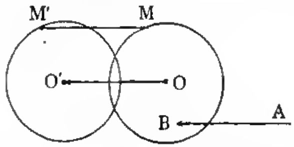
Ta có: $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; $M'' = T_{\vec{v}}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v}$

Vậy phép biến hình biến M thành điểm M'' là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

Bài 7. Cho đườ: g tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Giải



Ta có: $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Vậy M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$, mà M thuộc (O) nên quỹ tích điểm M' là đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ (hình trên).

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y'), trong đó:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

a) Cho hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F. Hãy tìm tọa độ của M' và N'.

b) Tính khoảng cách d giữa M và N, khoảng cách d' giữa M' và N'

c) Phép F có phải là phép dời hình hay không?

d) Khi α = 0, chứng tỏ rằng F là phép tịnh tiến.

Giải

a) Vì $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ nên tọa độ của $M'(x'_1; y'_1)$, $N'(x'_2; y'_2)$ là:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a \\ y'_1 = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x'_2 = x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a \\ y'_2 = x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b \end{cases}$$

Hay $M'(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + a;\ x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha + b)$

$N'(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a;\ x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b)$

b) Ta có:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha + a - x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - a)^2 + (x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha + b - x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha - b)^2}$$

$$= \sqrt{[(x_2 - x_1).\cos\alpha - (y_2 - y_1)\sin\alpha]^2 + [(x_2 - x_1)\sin\alpha + (y_2 - y_1)\cos\alpha]^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (y_2 - y_1)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d$$

Vậy $d = d' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

c) Phép F là một phép dời hình vì theo câu b thì F bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

d) Khi $\alpha = 0$, ta có: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ đây là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến, hay F là phép tịnh tiến khi $\alpha = 0$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây:

- Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(y; -x)$
- Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(2x; y)$

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình?

Giải

Giả sử $N'(x'_1; y'_1)$ là ảnh của $N(x_1; y_1)$ qua F_1, khi đó: $N'(y_1; -x_1)$

Ta có: $MN = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$

$$M'N' = \sqrt{(y_1 - y)^2 + (-x_1 + x)^2} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = MN$$

Vậy F_1 là phép dời hình.

Tương tự ta có F_2 không phải là một phép dời hình.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Phép tịnh tiến là một phép dời hình;

(B) Phép biến hình là một phép dời hình;

(C) Phép tịnh tiến biến đoạn thẳng thanh đoạn thẳng bé hơn nó;

(D) Phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn đồng tâm nhưng khác bán kính.

Câu 2. Cho MN = 6, gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Độ dài đoạn thẳng M'N' là:

(A) 3; **(B)** 6; **(C)** 9; **(D)** 12.

Câu 3. Cho biết B là điểm nằm giữa hai điểm A và C; A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) A'B' = A'C' + B'C'; **(B)** B'C' = A'B' + A'C';

(C) A'C' = A'B' + B'C'; **(D)** A'C' > A'B' + B'C'.

Câu 4. Cho đường tròn: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$, M(x; y) thuộc đường tròn. Gọi M'(x'; y') là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2; -4)$. Quỹ tích của điểm M' là đường tròn có phương trình:

(A) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$; **(B)** $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$;

(C) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$; **(D)** $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Câu 5. Cho đường thẳng d: x – 2y = 3, gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (5; -2)$. Phương trình của d' là:

(A) $x - 2y + 3 = 0$; **(B)** $x - 2y - 10 = 0$;

(C) $x - 2y - 12 = 0$; **(D)** $x - 2y - 3 = 0$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(B)	(C)	(Đ)	(C)

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa phép đối xứng trục.

a) Định nghĩa 1:

Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua a.

b) Kí hiệu và thuật ngữ

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi đơn giản là phép đối xứng trục. Đường thẳng a gọi là trục đối xứng.

2. Định lý:

Phép đối xứng trục là một phép dời hình

* Chú ý: Nếu phép đối xứng qua trục Ox biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') thì: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Công thức trên gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox.

3. Trục đối xứng của một hình

Định nghĩa 2: Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến H thành chính nó, tức là $Đ_d(H) = H$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 10. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Khi nào thì d song song với d'?

b) Khi nào thì d trùng với d'?

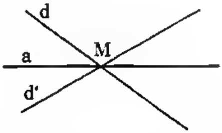
c) Khi nào thì d cắt d'? Giao điểm của d và d' có tính chất gì?

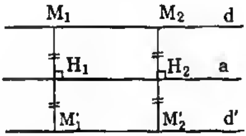
d) Khi nào d vuông góc với d'?

Hướng dẫn giải

a) d song song với d' khi d // a.

Thật vậy:



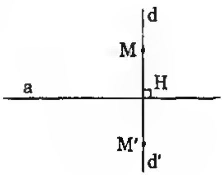


• Nếu d có chung với a một điểm M thì $Đ_a(M) = M \in d'$

Suy ta d và d' có chung điểm M nên d không song song với d'.

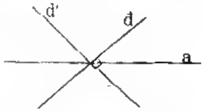
• Nếu d // a; trên d lấy hai điểm M_1, M_2 phân biệt; gọi M'_1, M'_2 là ảnh của M_1, M_2 qua $Đ_a$, dễ dàng chứng minh được $M_1M_2M'_2M'_1$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra d // d'. Tương tự ta có:

b) $d \equiv d'$ khi $\left[\begin{array}{l} d \equiv a \\ d \perp a \end{array}\right.$



c) d cắt d' khi d cắt a, khi đó giao điểm của d và d' nằm trên a.

d) d $\perp$ d' khi góc giữa d và a là 45°.



Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường tròn (ε_1) và (ε_2) lần lượt có phương trình:

(ε_1): $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$; (ε_2): $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$.

Viết phương trình ảnh của các đường tròn trên qua phép đối xứng trục Oy.

Giải

(ε_1), (ε_2) lần lượt có tâm là: $O_1\left(2; -\frac{5}{2}\right)$; $O_2(0; -5)$

Gọi $O_1'(x_1'; y_1')$, $O_2'(x_2'; y_2')$ là ảnh của O_1, O_2 qua phép đối xứng trục Oy và (ε_1'), (ε_2') là ảnh của (ε_1), (ε_2) qua phép đối xứng trục Oy

Khi đó: $\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ y_1' = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = -2 \\ y_1' = -\frac{5}{2} \end{cases}$ suy ra $O_1'\left(-2; -\frac{5}{2}\right)$

và: $\begin{cases} x_2' = -x_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2' = 0 \\ y_2' = 5 \end{cases}$ suy ra O_2' $(0; 5)$

Bán kính của (ε_1') bằng bán kính của (ε_1): $R_1' = R_1 = \frac{\sqrt{37}}{2}$

Do đó: (ε_1'): $(x + 2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} = x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$

(ε_2'): $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$ ((ε_2') trùng với (ε_2))

Bài 12. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

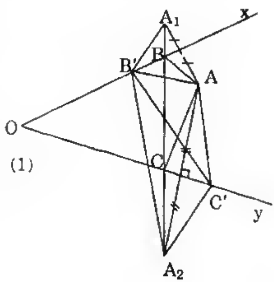
Giải

Gọi A_1 là ảnh của A qua phép đối xứng trục Ox, A_2 là ảnh của A qua phép đối xứng trục Oy. Gọi B, C lần lượt là giao điểm của A_1A_2 với Ox và Oy. Khi đó:

$AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2 = A_1A_2$ (1)

Gọi B', C' là hai điểm bất kỳ lần lượt nằm trên Ox và Oy. Ta có:

$AB' + B'C' + C'A = A_1B' + B'C' + C'A_2$



Mà $B'C' + C'A_2 > B'A_2$ nên $AB' + B'C' + C'A > A_1B' + B'A_2 > A_1A_2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AB + BC + CA < AB' + B'C' + C'A$

Vậy hai điểm B, C vừa xác định như trên là hai điểm cần tìm.

Bài 13. Cho hai điểm B,C cố định nằm trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải

Ta gọi H' là giao điểm của AH với (O; R). Khi đó:

$$HH' \perp BC \quad (1)$$

Và $\widehat{ACB} = \widehat{AH'B}$ (2) (cùng chắn cung AB)

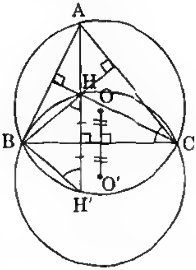
$\widehat{BHH'} = \widehat{ACB}$ (3) (góc có hai cạnh tương ứng vuông góc)

Từ (2), (3) suy ra: $\widehat{BHH'} = \widehat{AH'B} = \widehat{HH'B}$

Do đó $\Delta BHH'$ cân tại B

Suy ra $BH = BH'$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: BC là đường trung trực của HH' hay H' là ảnh của H qua phép đối xứng trục BC. Vậy khi A di chuyển trên (O) thì H' cũng di chuyển trên (O) do đó trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đường tròn (O'; R) là ảnh của (O; R) qua phép đối xứng trục BC.



(Nếu BC là đường kính thì (O) trùng với (O')).

Bài 14.

a) Chỉ ra trục đối xứng (nếu có) của mỗi hình sau đây (mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái).

MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE, COACH, IS, IT, SOS, CHEO

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số chẵn luôn có trục đối xứng.

Giải

a) Các hình sau đây có trục đối xứng:

b) Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm số chẵn, khi đó $f(-x) = f(x)$ hay nếu điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M'(-x; y)$ là ảnh của M cũng thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ do đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng. ($\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ là biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục trên).

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Phép dời hình là phép đối xứng trục;

(B) Phép đối xứng trục là một phép dời hình;

(C) Phép đối xứng trục là phép đồng nhất;

(D) Phép đối xứng trục là phép tịnh tiến.

Câu 2. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox, cho d: $2x - y = 1$ phương trình của d' là:

(A) $2x + y - 1 = 0$; (B) $2x - y - 1 = 0$;

(C) $2x - y + 1 = 0$; (D) $2x + y + 1 = 0$.

Câu 3. Gọi (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng qua trục Oy, cho (O): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Phương trình của (O') là:

(A) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$; (B) $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$;

(C) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$; (D) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Câu 4. Cho A(4; –3), B(2; 1), gọi A, B là ảnh của A', B' qua phép đối xứng trục $Đ_a$. Độ dài đoạn thẳng A'B' là:

(A) $\sqrt{5}$; (B) 5; (C) 10; (D) $2\sqrt{5}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có A(2; 2), B(1; 4), C(0; 1), G là trọng tâm. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép đối xứng trục Ox. Tọa độ trọng tâm G' của tam giác A'B'C' là:

(A) (1; 2); (B) $\left(1; \frac{7}{3}\right)$; (C) $\left(1; -\frac{7}{3}\right)$; (D) $\left(-1; \frac{7}{3}\right)$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(A)	(C)	(D)	(C)

§4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa phép quay

Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = φ được gọi là phép quay tâm O với góc φ. Phép quay tâm O góc φ thường được kí hiệu là Q(O, φ) hoặc đơn giản là Q.

2. Định lý:

Phép quay là một phép dời hình.

3. Phép đối xứng tâm

a/ Phép quay tâm O góc quay π còn được gọi là phép đối xứng qua điểm O, điểm O được gọi là tâm đối xứng.

b/ Phép đối xứng qua điểm O còn được định nghĩa:

Phép đối xứng qua điểm O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M′ đối xứng với M qua O, có nghĩa là:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$$

c/ Kí hiệu và thuật ngữ:

Phép đối xứng qua điểm O thường được kí hiệu là $Đ_O$. Phép đối xứng qua một điểm còn gọi đơn giản là phép đối xứng tâm. Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng, hay đơn giản là tâm đối xứng.

d/ Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm I(a; b). Nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành M′(x′; y′) thì:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Công thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $Đ_I$.

e/ Tâm đối xứng của một hình:

Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình H nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình H thành chính nó, tức là:

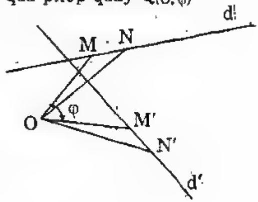
$$Đ_O(H) = H$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 15. Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d′ của d qua phép quay Q.

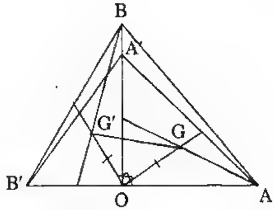
Giải

- Trên d lấy hai điểm M, N bất kỳ (M khác N)
- Dựng M′, N′ lần lượt là ảnh của M và N qua phép quay $Q_{(O,\varphi)}$
- Đường thẳng d′ đi qua M′, N′ là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,\varphi)}$. (hình bên)



Bài 16. Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B (hình 16 SGK). Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.

Giải



Xét phép quay $Q_{(O,-90^\circ)}$ ta có:

$\Delta OA'B'$ vuông cân tại O nên:

$Q_{(O,-90^\circ)}(B') = A'$

Tương tự: $Q_{(O,-90^\circ)}(B) = A$

$Q_{(O,-90^\circ)}(O) = O$

Vậy $\Delta OAA'$ là ảnh của $\Delta OBB'$ qua $Q_{(O,-90^\circ)}$

Do đó $Q_{(O,-90^\circ)}(G') = G$ hay ΔOGG vuông cân tại O.

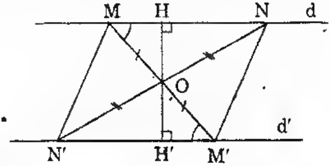
Bài 17. Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh:

a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d'.

b) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

Giải

a) Gọi M, N là hai điểm khác nhau trên d; M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua $Đ_O$ (hình bên)



Ta có: $\begin{cases} OM = OM' \\ ON = ON' \\ \widehat{MON} = \widehat{M'ON'} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases}$

Suy ra: $\Delta MON = \Delta M'ON'$

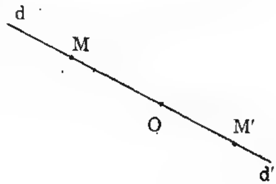
$\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OM'N'}$

Do đó d // d' (góc so le trong bằng nhau)

Gọi OH, OH' lần lượt là đường cao của ΔMON và $\Delta M'ON'$

Dễ thấy OH = OH' hay O cách đều d và d'.

b) Giả sử O thuộc d, gọi M là điểm bất kỳ trên d và $M' = Đ_O(M)$, ta có:



$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ do đó M, O, M' thẳng hàng hay M' thuộc d, suy ra: d' trùng với d.

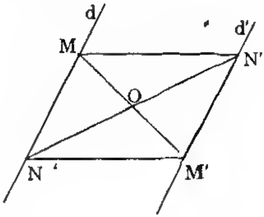
Ngược lại: Giả sử d trùng với d' và $M' = Đ_O(M)$

Khi đó M', O, M thẳng hàng mà M, M' thuộc d. Suy ra O thuộc d

Vậy hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

Bài 18. Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

Giải



- Gọi M, N là hai điểm khác nhau thuộc d, dựng M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua $Đ_O$.
- Đường thẳng d' đi qua M', N' là ảnh của d qua $Đ_O$.
- Ta có thể dựng ảnh d' của d qua $Đ_O$ mà chỉ cần sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần bằng cách:

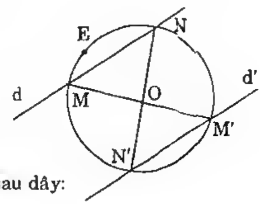
+ Lấy E ∉ d, E thuộc nửa mặt phẳng bờ d, nửa mặt phẳng này không chứa O.

+ Dùng compa vẽ đường tròn (O, OE). Đường tròn (O, OE) cắt d tại M và N.

+ Hai lần dùng thước thẳng dựng:

M' = MO ∩ (O, OE) và N' = NO ∩ (O, OE);

Dùng thước thẳng dựng d' đi qua M' và N'.



Bài 19. Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau đây:

a) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau;

b) Hình gồm hai đường thẳng song song;

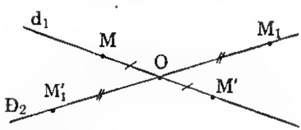
c) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau;

d) Đường elip;

e) Đường hypebol.

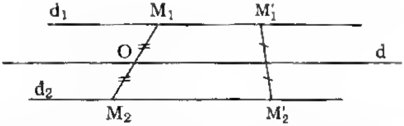
Hướng dẫn giải

a)

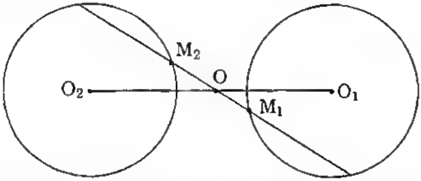


Tâm đối xứng của hình gồm hai đường thẳng cắt nhau là giao điểm của hai đường thẳng đó. Thật vậy với M bất kỳ thuộc hình trên thì M' = $Đ_O$(M) cũng thuộc hình đó.

b)



Hình gồm hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng và tập hợp các tâm đối xứng đó là đường thẳng song song cách đều cả hai đường thẳng trên.

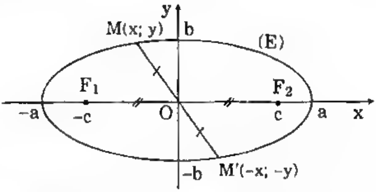


c)

- Nếu hai đường tròn có tâm trùng nhau thì tâm đối xứng của hình chính là tâm của đường tròn.

- Nếu hai đường tròn có tâm không trùng nhau thì tâm đối xứng của hình là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường tròn (hình trên).

d)



Tâm đối xứng của hình elip là trung điểm O của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm của elip (hình trên). Thật vậy, phương trình chính tắc của elip có dạng: (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1) (với O là gốc hệ tọa độ, $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, $a > b > 0$). Xét điểm $M(x; y) \in (E)$.

$$M' = Đ_O(M) \Leftrightarrow M'(-x; -y). \text{ Vì } (1) \Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1$$

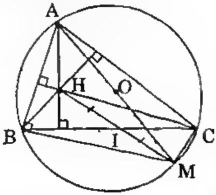
nên $M' \in (E)$.

Tóm lại: Với mỗi điểm $M \in (E)$ và $M' = Đ_O(M)$ thì $M' \in (E)$, nên O là tâm đối xứng của (E).

e) Tương tự như đ) thì tâm đối xứng của hypebol là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm.

Bài 20. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải



Gọi I là trung điểm của BC, vẽ đường kính AM, ta thấy H, I, M thẳng hàng và I là trung điểm của HM. Thật vậy:

$BH \perp AC$ và $CM \perp AC$

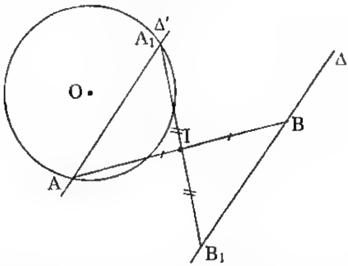
Suy ra: BH // CM (1)

Tương tự: CH // BM (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác BHCM là hình bình hành mà I là trung điểm của BC nên I cũng là trung điểm của HM, do đó H là ảnh của M qua phép $Đ_I$. Vì M thuộc đường tròn cố định (O; R) nên H thuộc đường tròn (O'; R) là ảnh của đường tròn (O; R) qua $Đ_I$.

Bài 21. Cho đường tròn (O; R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O; R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Giải



Dựng đường thẳng Δ' là ảnh của Δ qua phép $Đ_I$, khi đó A là giao điểm của Δ' với (O; R), B là giao điểm của AI với Δ. Nếu Δ' cắt (O; R) tại hai điểm thì ta có hai cặp điểm (A, B) cần tìm. Nếu Δ' là tiếp tuyến của (O; R) thì ta có một cặp điểm (A; B) cần tìm; nếu Δ' không có điểm chung với (O; R) thì không có cặp điểm (A, B) cần tìm.

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0; y_0)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình đường thẳng Δ'.

Giải

1) Nếu $b \neq 0$. Ta có: $A\left(0; -\frac{c}{b}\right)$ thuộc Δ, gọi $A'(x'; y')$ là ảnh của A qua phép đối xứng tâm $Đ_I$. Khi đó I là trung điểm của AA', ta có:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{0 + x'}{2} \\ y_0 = \dfrac{-\frac{c}{b} + y'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_0 \\ y' = 2y_0 + \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

Đường thẳng Δ' đi qua A' có vectơ pháp tuyến là $\vec{n'} = (a; b)$ (vì Δ // Δ').

Nên Δ': $a(x - 2x_0) + b(y - 2y_0 - \frac{c}{b}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0$

2) Nếu $b = 0$, khi đó $a \neq 0$ và điểm $B\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ thuộc Δ. Hoàn toàn tương tự như trong 1) ta được Δ': $ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Phép đối xứng tâm là phép đồng nhất;

(B) Phép đối xứng tâm là phép quay;

(C) Phép quay không phải là một phép dời hình;

(D) Phép đối xứng tâm không phải là một phép dời hình.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hình tam giác có một tâm đối xứng;

(B) Hình tam giác không có tâm đối xứng;

(C) Hình bình hành có một tâm đối xứng;

(D) Hình gồm hai đường thẳng song song không có tâm đối xứng.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(3; –2), I(0; 1). Tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép đối xứng tâm $Đ_I$ là:

(A) (–3; 2); (B) (3; 2); (C) (3; –4); (D) (–3; 4).

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ: $2x - y + 1 = 0$, gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_O$. Phương trình của Δ' là:

(A) $2x - y - 1 = 0$; (B) $2x - y + 1 = 0$;

(C) $2x + y + 1 = 0$; (D) $2x + y + 2 = 0$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm: A(m; 2m + 3), I(2; –1). A'(x'; y') là ảnh của A qua phép đối xứng $Đ_I$. Quỹ tích của A' có phương trình:

(A) $x + 2y + 3 = 0$;   (B) $2x - y + 3 = 0$;

(C) $2x - y + 13 = 0$;   (D) $2x - y - 13 = 0$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(C)	(D)	(A)	(D)

§5. HAI HÌNH BẰNG NHAU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý

Nếu ABC và A'B'C' là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'

2. Thế nào là hai hình bằng nhau:

a) Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

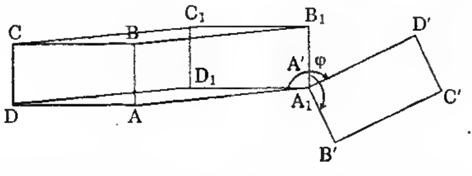
b) Hệ quả: Nếu hình H_1 bằng hình H_2 và hình H_2 bằng hình H_3 thì hình H_1 bằng hình H_3.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 23. Chứng tỏ rằng hai hình chữ nhật có cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' có các kích thước bằng nhau. Trước tiên ta thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ (hình dưới)



ta được hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$ bằng hình chữ nhật ABCD.

Sau đó ta thực hiện phép quay tâm A_1, góc quay φ (hình trên),

$$\varphi = (A_1B_1; A_1B')$$

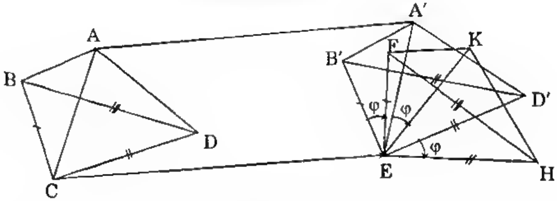
Khi đó hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$ biến thành hình chữ nhật A'B'C'D' bằng nó. Vậy hình chữ nhật ABCD bằng hình chữ nhật A'B'C'D'.

Bài 24. a) Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

b) Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

c) Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không?

Hướng dẫn giải

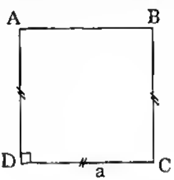


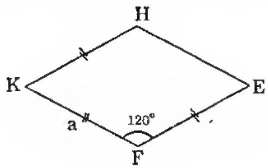
a) (Xem hình trên) giả sử ta có: $\begin{cases} BD = EH \\ AB = FK \\ AD = KH \\ DC = HE \\ CB = EF \end{cases}$

Ta phải chỉ ra một phép dời hình F biến tứ giác ABCD thành tứ giác KFEH. Xét phép $T_{\vec{CE}}$ biến tứ giác ABCD thành tứ giác A'B'ED'. Ta chứng minh được: EF = EB', EK = EA', EH = ED' và: (EB', EF) = (EA', EK) = (ED', EH), đặt φ = (EB', EF). Xét phép quay $Q_{(E,\ \varphi)}$ thì $Q_{(E,\ \varphi)}$ biến tứ giác A'B'ED' thành tứ giác KFEH. Như vậy phép biến hình F được thực hiện bằng cách tiến hành liên tiếp các phép $T_{\vec{CE}}$ và $Q_{(E,\ \varphi)}$ là một phép dời hình biến tứ giác ABCD thành tứ giác KFEH, do đó các tứ giác ABCD và KFEH bằng nhau.

b) Từ đề bài suy ra các tứ giác đã cho thỏa mãn các điều kiện trong a) nên việc chứng minh như trong a)

c) Có thể không bằng nhau, chẳng hạn hình vuông ABCD cạnh a và hình thoi KFEH cạnh a, có $\widehat{EFK} = 120°$.





Không có phép dời hình nào biến hình vuông ABCD thành hình thoi KFEH.

Bài 25. Đa giác lồi n cạnh gọi là n – giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n – giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Nếu hai n – giác đều $A_1A_2.....A_n$ và $A'_1A'_2.....A'_n$ bằng nhau, khi đó tồn tại phép dời hình F biến A_1 thành A'_1, A_2 thành A'_2, ..., A_n thành A'_n, suy ra cạnh của hai n – giác đều nói trên bằng nhau.

Ngược lại, nếu hai n – giác đều $A_1A_2.....A_n$ và $A'_1A'_2....A'_n$ có cạnh bằng nhau, khi đó dễ chứng minh được: $A_1A_2 = A'_1A'_2$, $A_1A_3 = A'_1A'_3$,...., $A_1A_n = A'_1A'_n$.

Xét các phép dời hình: $T_{\overrightarrow{A_1A'_1}}$ và $Q_{(A_1, \varphi)}$

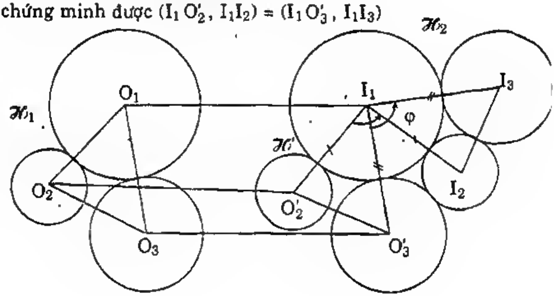
Trong đó: $T_{\overrightarrow{A_1A'_1}}(A_1) = A'_1$, $T_{\overrightarrow{A_1A'_1}}(A_2) = B_2$, ..., $T_{\overrightarrow{A_1A'_1}}(A_n) = B_n$ và $\varphi = (A'_1B_2, A'_1A'_2)$ thì phép biến hình F tạo thành bởi việc thực hiện liên tiếp các phép $T_{\overrightarrow{A_1A'_1}}$ và $Q_{(A_1, \varphi)}$ là một phép dời hình biến n – giác đều $A_1A_2....A_n$ thành n – giác đều $A'_1A'_2.....A'_n$, tức là hai n – giác đều ấy bằng nhau.

Bài 26. Hình $\mathcal{H}_1$ gồm ba đường tròn $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$ và $(O_3; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình $\mathcal{H}_2$ gồm ba đường tròn$(I_1; r_1)$, $(I_2; r_2$, $(I_3; r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Xét phép $T_{\overrightarrow{O_1I_1}}$. Phép $T_{\overrightarrow{O_1I_1}}$ biến hình $\mathcal{H}_1$ thành hình $\mathcal{H}'$, trong đó: $T_{\overrightarrow{O_1I_1}}(O_1) = I_1$; $T_{\overrightarrow{O_1I_1}}(O_2) = O'_2$; $T_{\overrightarrow{O_1I_1}}(O_3) = O'_3$.

Ta chứng minh được $(I_1O'_2, I_1I_2) = (I_1O'_3, I_1I_3)$

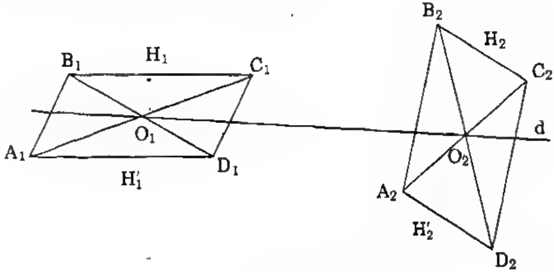


Và $I_1O_2' = I_1I_2$, $I_1O_3' = I_1I_3$, cho nên phép quay $Q_{(I_1, \varphi)}$ biến hình $\mathscr{H}'$ thành $\mathscr{H}_2$. Như vậy thực hiện liên tiếp các phép biến hình $T_{\overrightarrow{O_1I_1}}$ và $Q_{(I_1, \varphi)}$ ta được phép dời hình F biến $\mathscr{H}_1$ thành $\mathscr{H}_2$.

Vậy $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.

Bài 27. Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đối xứng của hai hình bình hành đã cho. Khi đó đường thẳng d đi qua O_1, O_2 chia mỗi hình bình hành thành hai phần (hình trên). Đối với hình $A_1B_1C_1D_1$ ta thấy phép đối xứng tâm O_1 biến H_1 thành H_1' nên hình H_1 bằng hình H_1'. Tương tự H_2 bằng H_2'

Vậy d là đường thẳng cần tìm.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây luôn luôn đúng?

(A) Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có các góc tương ứng bằng nhau;

(B) Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có diện tích bằng nhau;

(C) Hai tam giác bằng nhau nếu có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia;

(D) Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có chu vi bằng nhau.

Câu 2. Gọi tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua một phép dời hình. Khẳng định nào sau đây sai?

(A) Tam giác ABC bằng tam giác A'B'C';

(B) Tam giác ABC và tam giác A'B'C' có diện tích bằng nhau;

(C) Tam giác ABC và tam giác A'B'C' không đồng dạng với nhau;

(D) Tam giác ABC và tam giác A'B'C' có chu vi bằng nhau.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây luôn luôn đúng?

(A) Hai tứ giác có các cạnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau;

(B) Hai tứ giác có các góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau;

(C) Hai tứ giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và hai đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau;

(D) Hai tứ giác có hai cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

Câu 4. Cho tam giác ABC có AB = 5, AC = 6, BC = 7. Biết rằng tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua một phép dời hình, diện tích tam giác A'B'C' là:

(A) $6\sqrt{6}$; (B) 36; (C) 6; (D) 18.

Câu 5. Cho đường tròn (O; R) có diện tích là 25π. Gọi (O'; R') là ảnh của (O; R) qua một phép dời hình, bán kính R' của (O'; R') là:

(A) 5; (B) 10; (C) 15; (D) 20.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(C)	(C)	(A)	(A)

§6. PHÉP VỊ TỰ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

a) Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k.

b) Kí hiệu: Phép vị tự tâm O tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,k)}$.

2. Các tính chất của phép vị tự:

a) Định lý 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì: $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|.MN$

b) Định lý 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa ba điểm thẳng hàng đó.

c) Hệ quả: Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

3) Ảnh của đường tròn qua phép vị tự:

Định lý 3: Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

4) Tâm vị tự của hai đường tròn: Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; R'). Tồn tại điểm O để phép vị tự tâm O biến (I; R) thành (I'; R'); điểm O gọi là tâm vị tự của hai đường tròn đó.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 28. Các phép sau đây có phải là phép vị tự hay không: phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?

Giải

Phép đối xứng tâm là phép vị tự vì với M' là ảnh của M qua $Đ_O$ thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, tức là phép vị tự tỉ số $k = -1$. Tương tự ta có phép đồng nhất là một phép vị tự.

Các phép còn lại không phải là phép vị tự vì không tồn tại điểm O cố định sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ với điểm M bất kỳ, M' là ảnh của M qua phép đó.

Bài 29. Các khẳng định sau đây có đúng không?

a) Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó)

b) Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động

c) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

Giải

a) Là khẳng định đúng vì $V_{(O,\,k)}(O) = O$

b) Đây là khẳng định sai vì ngoài điểm O là bất động ra thì $V_{(O,\,1)}$ còn có nhiều điểm bất động khác O. Thật vậy: với M bất kỳ thì $\overrightarrow{OM} = 1.\overrightarrow{OM}$ tức là $V_{(O,\,1)}(M) = M$

c) Là khẳng định đúng vì:

Giả sử ngoài điểm O là bất động thì $V_{(O,\,k)}$ còn có điểm M khác điểm O là bất động thì: $\overrightarrow{OM} = k.\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow k = 1$. Khi đó với mọi điểm N ta đều có $\overrightarrow{ON} = 1.\overrightarrow{ON}$, tức là mọi điểm N bất kỳ đều là điểm bất động, tức là phép vị tự trên có vô số điểm bất động.

Bài 30. Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:

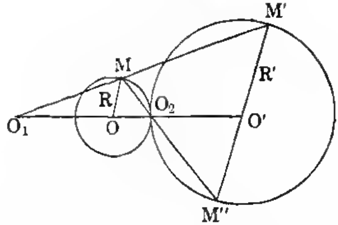
a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

Hướng dẫn giải

a)

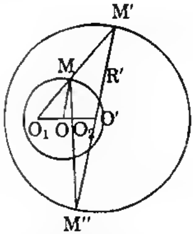


Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài với nhau (hình trên) Trên đường tròn (O; R) lấy điểm M bất kỳ sao cho M không nằm trên đường thẳng OO'. Vẽ đường kính M'M'' của đường tròn (O'; R') sao cho: M'M'' // OM (M' cùng phía với M đối với OO'). Gọi O_1, O_2 lần lượt là giao điểm của OO' với MM' và MM''. Ta chứng minh được O_2 là tiếp điểm của hai đường tròn và đồng thời O_2 là tâm vị tự trong còn O_1 là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn.

Thật vậy: vì OM // M'M'' nên: $\overrightarrow{O_1M'} = \frac{R}{R'}\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_2M} = -\frac{R}{R'}\overrightarrow{O_2M''}$, do đó O_1, O_2 lần lượt là tâm vị tự ngoài và trong của hai đường tròn.)

b) Tương tự câu a) nhưng tâm vị tự ngoài là tiếp điểm của hai đường tròn, tâm vị tự trong là giao điểm của MM'' và OO'.

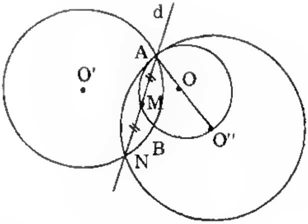
c) Tương tự câu a) và câu b) nhưng O_1, O_2 đều nằm trong (O; R) (hình bên)



Bài 31. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

Giải

Ta có M là trung điểm của AN nên $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$, hay N là ảnh của M qua phép vị tự tâm A tỉ số 2. Để dựng đường thẳng d ta dựng đường tròn (O'') là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm A tỉ số 2; (O'') cắt (O') tại điểm thứ hai là N. Ta sẽ chứng minh đường thẳng AN chính là d. Thật vậy: gọi M là giao điểm khác A của AN và (O), theo cách xác định N thì N là ảnh của M qua phép



$V_{(A,\,2)}$ nên $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$, tức là M là trung điểm của AN. Theo cách dựng (O'') thì điểm N tồn tại duy nhất nên d là tồn tại duy nhất.

Bài 32. Cho đường tròn (O; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc $\widehat{MOI}$ cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

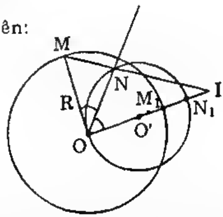
Hướng dẫn giải

Xét ΔOMI ta có ON là phân giác góc $\widehat{MOI}$ nên:

$$\frac{OM}{OI} = \frac{MN}{IN} \Leftrightarrow \frac{OM}{OI} = \frac{IM - IN}{IN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OM}{OI} = \frac{IM}{IN} - 1 \Leftrightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{OM + OI}{OI}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{OI}{OM + OI}$$



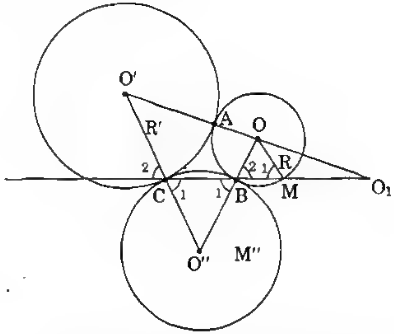
Do đó $\overrightarrow{IN} = \frac{OI}{OM + OI}.\overrightarrow{IM}$, suy ra N là ảnh của M qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{OI}{OM + OI} = \frac{IO}{R + IO}$.

Mà M thuộc (O; R) nên quỹ tích của điểm N là ảnh (O'; R') của đường tròn (O; R) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{OI}{OM + OI}$, trừ điểm N_1 là giao điểm của (O'; R') với IO.

Dễ thấy O thuộc đoạn OI và $O'O = R' = \frac{IO}{R + IO}.R$.

Bài 33. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O'') thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải



Gọi M là giao điểm thứ hai của CB và (O). Do $\Delta O''CB$ cân tại O'', ΔOBM cân tại O nên: $\widehat{C_2} = \widehat{C_1} = \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \widehat{M_1} \Rightarrow O'C \,//\, OM \Rightarrow OOMC$ là hình thang. Vì $OM \neq O'C$ nên các cạnh bên O'O và CM kéo dài cắt nhau tại O_1. Trong $\Delta O_1O'O''$ ta có: $\dfrac{O_1M}{O_1C} = \dfrac{O_1O}{O_1O'} = \dfrac{R}{R'}$ (1).

Vì O, O' cố định và R, R' cho trước cho nên từ (1) suy ra O_1 cố định và $\overrightarrow{O_1M} = \dfrac{R}{R'}\overrightarrow{O_1C}$, tức là O_1 là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'). Tóm lại, đường thẳng BC luôn luôn đi qua điểm O_1 là tâm vị tự ngoài của (O) và (O').

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây luôn luôn đúng?

(A) Phép vị tự là một phép dời hình;

(B) Phép quay là một phép vị tự;

(C) Phép vị tự có hai điểm bất động;

(D) Phép đối xứng tâm là một phép vị tự.

Câu 2. Cho M(2; 3); N(–1; 2). Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép vị tự tỉ số k = 2. Độ dài đoạn thẳng M'N' là:

(A) $\sqrt{10}$; (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$; (C) $2\sqrt{10}$; (D) 10.

Câu 3. Cho O(2; 3) và M(1; –1), gọi M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{3}{2}$. Tọa độ của điểm M là:

(A) (–1; –4); (B) $\left(\frac{1}{2}; -4\right)$; (C) (–1; 4); (D) $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$.

Câu 4. Cho đường thẳng d: $x - 2y + 1 = 0$, I(1; 2). d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm I tỉ số k = 2, phương trình d' là:

(A) $x - 2y - 1 = 0$; (B) $x + 2y + 1 = 0$;

(C) $x + 2y - 1 = 0$; (D) $x + 2y + 2 = 0$.

Câu 5. Cho đường tròn (O): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và I(2; –1); M là một điểm trên (O), gọi M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm I tỉ số k = 2. Phương trình quỹ tích của M' là:

(A) $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$; (B) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$;

(C) $x^2 + y^2 + 10y + 9 = 0$; (D) $x^2 + y^2 - 10y - 9 = 0$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(C)	(D)	(A)	(A)

§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa phép đồng dạng

Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng với tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kỳ M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có: M'N' = kMN.

2. Định lý:

Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

3) Hệ quả:

Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR, biến góc thành góc bằng nó.

4) Hai hình đồng dạng

a) Định nghĩa: Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

b) **Chú ý:** Đối với các tam giác, định nghĩa nói trên phù hợp với khái niệm tam giác đồng dạng ở lớp 8.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 34. Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

Hướng dẫn giải

• Gọi AA_1 là trung tuyến của ΔABC, G là trọng tâm; A', A'_1, G' lần lượt là ảnh của A, A_1, G qua một phép đồng dạng, khi đó:

$$A'A'_1 = k.AA_1;\ A'G' = k.AG;\ G'A'_1 = k.GA_1$$

Mà $AG = \frac{2}{3}AA_1$ nên: $kAG = \frac{2}{3}.k.AA_1 \Leftrightarrow A'G' = \frac{2}{3}A'A'_1$ (1)

Mặt khác:

$$B'A'_1 = k.BA_1;\ C'A'_1 = k.CA_1 \text{ và } BA_1 = CA_1$$

Do đó: $B'A'_1 = k.CA_1 = C'A'_1$ hay A'_1 là trung điểm của B'C'

Suy ra $A'A'_1$ là trung tuyến của $\Delta A'B'C'$ (2)

Từ (1) và (2) ta có G' là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.

• Gọi AA_2, BB_2, CC_2 lần lượt là đường cao của ΔABC, và H là trực tâm; A'_2, B'_2, C'_2, H' lần lượt là ảnh của A_2, B_2, C_2, H qua phép đồng dạng, khi đó:

B, A_2, C thẳng hàng nên B', A'_2, C' thẳng hàng $\widehat{AA_2B} = 90^\circ$ nên $\widehat{A'A'_2B'} = 90^\circ$ hay $A'A'_2$ là đường cao của $\Delta A'B'C'$

Tương tự $B'B'_2$, $C'C'_2$ cũng là các đường cao của $\Delta A'B'C'$

mà A, H, A_2 thẳng hàng nên A', H', A'_2 thẳng hàng.

Tương tự B', H', B'_2 thẳng hàng; C', H', C'_2 thẳng hàng

Do đó H' là giao điểm của $A'A'_2$, $B'B'_2$, $C'C'_2$

Suy ra H' là trực tâm tam giác A'B'C'.

• Tương tự ta có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' cũng là ảnh của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua phép đồng dạng trên.

Bài 35. Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Hướng dẫn giải

Cho hai đa giác đều $A_1A_2.....A_n$; $A'_1A'_2.....A'_n$. Phép vị tự tỉ số $\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}$ biến đa giác đều $A_1A_2.....A_n$ thành đa giác đều $B_1B_2.....B_n$ có các canh

$$B_1B_2 = \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}A_1A_2 = A'_1A'_2;\ B_2B_3 = A'_2A'_3;....;\ B_nB_1 = A'_nA'_1$$

Mặt khác, hai đa giác đều có cạnh bằng nhau thì bằng nhau, do đó đa giác $B_1B_2.....B_n$ bằng đa giác $A'_1A'_2.....A'_n$, khi đó tồn tại phép dời hình biến đa giác $B_1B_2.....B_n$ thành đa giác $A'_1A'_2.....A'_n$. Tức là có phép đồng dạng F là hợp thành của phép vị tự và phép dời hình như trên biến đa giác $A_1A_2.....A_n$ thành da giác $A'_1A'_2.....A'_n$ hay hai da giác $A_1A_2.....A_n$ và $A'_1A'_2.....A'_n$ đồng dạng với nhau.

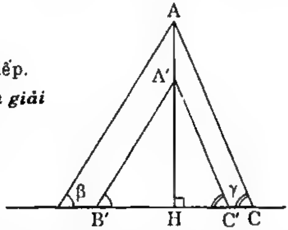
Bài 36. Dựng tam giác ABC nếu biết hai góc $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$ và một trong các yếu tố sau:

a) Đường cao AH = h;

b) Đường trung tuyến AM = m;

c) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

Hướng dẫn giải

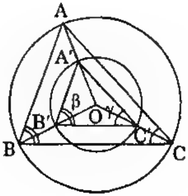


a) Ta dựng $\Delta A'B'C'$ với cạnh B'C' tùy ý và các góc $\widehat{B'} = \beta$, $\widehat{C'} = \gamma$. Vẽ đường cao A'H của $\Delta A'B'C'$, trên tia HA' dựng điểm A sao cho HA = h

- Nếu A' trùng với A thì $\Delta A'B'C'$là tam giác cần dựng.

- Nếu A' không trùng với A thì qua A ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với A'B' và A'C' lần lượt cắt dường thẳng B'C' tại B và C, khi đó ΔABC là tam giác cần dựng.

b) Tương tự câu a).



c) Dựng $\Delta A'B'C'$ có cạnh B'C' tùy ý và các góc $\widehat{B'} = \beta$, $\widehat{C'} = \gamma$.

Dựng tâm O của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$. Vẽ đường tròn tâm O bán kính R, đường tròn này cắt các tia OA', OB', OC' lần lượt tại A, B, C.

ΔABC là tam giác cần dựng.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây sai?

(A) Phép vị tự $V_{(O;\,3)}$ là một phép quay;

(B) Phép tịnh tiến là một phép đồng dạng;

(C) Phép quay là một phép đồng dạng;

(D) Phép đối xứng trục là một phép đồng dạng.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây luôn luôn đúng?

(A) Phép đồng dạng biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng nó;

(B) Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng;

(C) Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó;

(D) Phép đồng dạng biến góc thành góc bằng nó.

Câu 3. Cho tam giác ABC có diện tích 6, gọi A'B'C' là ảnh của ABC qua phép đồng dạng tỉ số $k = 2$. Diện tích tam giác A'B'C' là:

(A) 6; (B) 12; (C) 18; (D) 24.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$. Gọi A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua phép đồng dạng tỉ số $\frac{4}{3}$. Chu vi tam giác A'B'C' là:

(A) 12; (B) 22; (C) 32; (D) 42.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hai tam giác vuông luôn đồng dạng với nhau;

(B) Hai tam giác cân luôn đồng dạng với nhau;

(C) Hai tam giác vuông cân luôn đồng dạng với nhau;

(D) Hai hình bình hành và hình thoi luôn đồng dạng với nhau.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(D)	(D)	(C)	(C)

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

I. CÂU HỎI KIỂM TRA

Câu 1. Các khẳng định sau đây có đúng không?

a) Phép đồng nhất là một phép tịnh tiến;

b) Phép đồng nhất là một phép quay;

c) Phép đồng nhất là một phép đối xứng tâm;

d) Phép đối xứng tâm là một phép vị tự;

e) Phép quay là một phép đồng dạng;

f) Phép vị tự là một phép dời hình.

Trả lời

a) Phép đồng nhất là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$. Vậy a) đúng.

b) Phép đồng nhất là phép quay với góc quay bằng 0. Vậy b) đúng.

c) Phép đồng nhất không phải là phép đối xứng tâm vì phép đối xứng tâm là phép quay 180^o. Vậy c) sai.

d) Phép đối xứng tâm là phép vị tự tỉ số -1. Vậy d) đúng.

e) Phép quay là một phép đồng dạng. Vậy e) đúng.

f) Nếu $k = 1$ thì phép vị tự tỉ số k là một phép dời hình, đó là phép đồng nhất; nếu $k = -1$ thì phép vị tự tỷ số k là phép dời hình, đó là phép đối xứng tâm.

Nếu $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -1 \end{cases}$ thì phép vị tự tỷ số k không phải là phép dời hình vì nó biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có độ dài bằng $|k|$ lần nó.

Vậy f) sai khi tỷ số vị tự là k mà $\begin{cases} k \neq 1 \\ k \neq -1 \end{cases}$, đúng khi $k = \pm 1$.

Câu 2. Cho hai điểm A, B phân biệt. Các khẳng định sau đây có đúng không?

a) Có duy nhất một phép đối xứng trục biến A thành B;

b) Có duy nhất một phép đối xứng tâm biến A thành B;

c) Có duy nhất một phép tịnh tiến biến A thành B;

d) Có duy nhất một phép quay biến A thành B;

e) Có duy nhất một phép vị tự biến A thành B.

Trả lời

a) Đúng vì đường trung trực của đoạn thẳng AB là duy nhất.

b) Đúng vì trung điểm của đoạn thẳng AB là duy nhất.

c) Đúng vì với hai điểm A, B tồn tại duy nhất một vectơ $\overrightarrow{AB}$ có chiều từ A đến B (nếu có các vectơ khác thì vectơ đó cũng bằng $\overrightarrow{AB}$).

d) Sai vì qua hai điểm A, B ta dựng được vô số tam giác cân AOB (O nằm trên đường trung trực của AB).

e) Sai vì có vô số phép vị tự mà tâm vị tự nằm trên đường thẳng AB, biến A thành B (với điểm O bất kỳ trên AB ta luôn có số k sao cho $\overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OA}$).

Câu 3. Hãy chỉ ra một số hình có một trong các tính chất sau đây?

a) Có vô số trục đối xứng;

b) Có vô số tâm đối xứng;

c) Có đúng n trục đối xứng.

Trả lời

a) Hình tròn có vô số trục đối xứng.

b) Hình gồm hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng.

c) n - giác đều có đúng n trục đối xứng (n chẵn).

II. BÀI TẬP

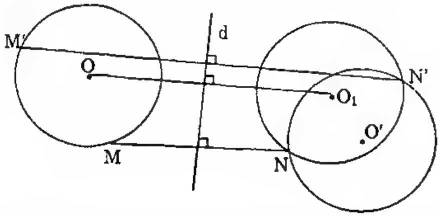
Bài 1. Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R') và một đường thẳng d.

a) Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho d là trung trực của đoạn thẳng MN.

b) Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của (O; R) và tiếp tuyến IT' của (O'; R') hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của các góc đó.

Hướng dẫn giải

a)



Gọi (O_1; R) là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng trục d

- Nếu (O_1; R) không cắt (O'; R') thì không tồn tại hai điểm M, N thỏa mãn điều kiện trên.

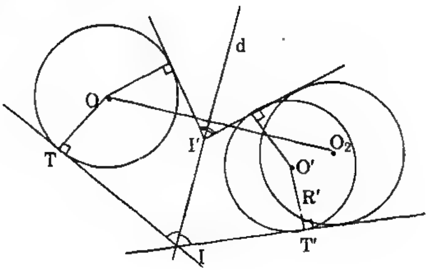
- Nếu (O_1; R) tiếp xúc với (O'; R') thì tồn tại duy nhất một cặp điểm M, N thỏa mãn điều kiện của đề bài.

- Nếu (O_1; R) cắt (O'; R') tại hai điểm phân biệt thì có hai cặp điểm M, N thỏa mãn điều kiện trên. Thật vậy:

Gọi N là giao điểm của (O_1; R) với (O'; R'); qua N dựng đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng đó cắt (O; R) tại hai điểm, ta sẽ xác định được điểm M là điểm đối xứng với N qua d, tức là d là đường trung trực của MN (hình vẽ trên).

Nếu (O_1; R) trùng với (O'; R') thì có vô số cặp điểm (M, N) thỏa mãn đề bài.

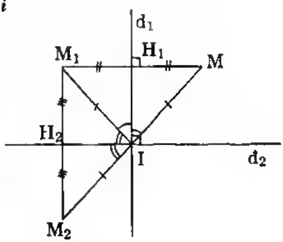
b)



Gọi $(O_2; R)$ là ảnh của $(O; R)$ qua phép đối xứng trục d; I là giao điểm của tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(O_2; R)$ và $(O'; R')$ với d, qua I kẻ tiếp tuyến IT với đường tròn $(O; R)$ (hình trên). Khi đó d là đường phân giác của góc $\widehat{TIT'}$ (T' là tiếp điểm của tiếp tuyến qua I với $(O'; R')$). Vì phép đối xứng trục biến góc thành góc bằng nó, cho nên I là điểm phải tìm. Tùy vào $(O; R)$ và $(O'; R')$ mà có thể có: một, hai hoặc vô số điểm I; cũng có thể không có điểm I nào thỏa mãn đề bài.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng

Hướng dẫn giải



M là điểm bất kỳ thuộc hình H.

Giả sử hình H có hai trục đối xứng d_1, d_2 vuông góc với nhau tại I; gọi $M_1 = Đ_{d_1}(M)$, $M_2 = Đ_{d_2}(M_1)$ thì ta có M_2 thuộc H. Ta sẽ chứng minh M_2 là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $Đ_I$

Thật vậy: vì $M_1 = Đ_{d_1}(M)$ nên

$IM = IM_1$, tương tự $IM_1 = IM_2$

Do đó $IM = IM_2$ (1)

Mà $\widehat{MIM_2} = \widehat{MIH_1} + \widehat{H_1IM_1} + \widehat{M_1IH_2} + \widehat{H_2IM_2}$ (*) (H_1, H_2 lần lượt là giao điểm của MM_1, M_1M_2 với d_1, d_2)

Vì $\widehat{MIH_1} = \widehat{H_1IM_1}$ và $\widehat{M_1IH_2} = \widehat{H_2IM_2}$ nên từ (*)

ta có: $\widehat{MIM_2} = 2(\widehat{M_1IH_1} + \widehat{M_1IH_2}) = 2\widehat{H_1IH_2} = 180^\circ$ (do: $d_1 \perp d_2$)

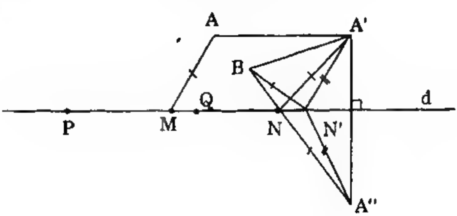
Suy ra: M, I, M_2 thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) ta có M_2 là ảnh M qua $Đ_I$, hay $Đ_I$ biến H thành H

Vậy I là tâm đối xứng của H, hay H có tâm đối xứng.

Bài 3. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P, Q và A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.

Hướng dẫn giải



Giả sử đã tìm được M, N thỏa mãn đề bài.

Lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$, ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AA'}$

Suy ra tứ giác AA'NM là hình bình hành, do đó AM = A'N

Vậy AM + BN là bé nhất khi A'N + BN là bé nhất. Ta tìm điểm N như sau:

Gọi A'' là ảnh của A' qua phép đối xứng trục d; N là giao điểm của BA'' với d, khi đó A'N + BN là bé nhất. Thật vậy: Với điểm N' bất kỳ khác N (trên d) ta có: BN + A'N = BN + NA'' = BA'' < BN' + N'A'' = BN' + N'A'

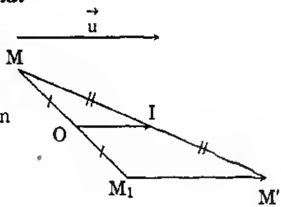
Do đó BN + A'N là bé nhất. Với điểm N xác định như trên, ta xác định được điểm M sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ (M là ảnh của N qua phép $T_{\overrightarrow{QP}}$). Các điểm M, N xác định như trên thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài 4. Cho vectơ $\vec{u}$ và một điểm O. Với điểm M bất kỳ, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$. Gọi F là phép biến hình biến điểm M thành M'

a) F là phép hợp thành của hai phép nào? F có phải là phép dời hình hay không?

b) Chứng tỏ rằng F là một phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải



a) F là hợp thành của phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và F là một phép dời hình

b) Gọi I là ảnh của O qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{u}$, khi đó I cố định và:

$$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM'}$$

$$= 2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} \qquad (*)$$

mà $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\vec{u} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IO} = -\vec{u}$ (1)

$M_1 = Đ_O(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ (2)

$M' = T_{\vec{u}}(M_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M'} = \vec{u}$ (3)

Nên từ (1), (2) và (3) ta có: (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = -\vec{u} + \vec{0} + \vec{u} = \vec{0}$

Hay M' là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $Đ_I$.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A; M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B; M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.

a) Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành điểm M_3 là một phép đối xứng tâm.

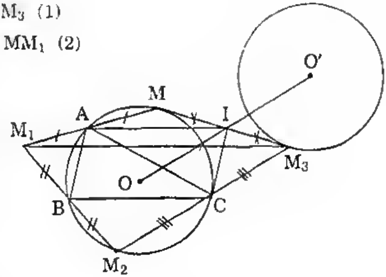
b) Tìm quỹ tích điểm M_3.

Hướng dẫn giải

a) Gọi I là giao điểm của đường thẳng đi qua A và song song với BC với đường thẳng MM_3.

Ta có BC // M_1M_3 nên AI // M_1M_3 (1)

Mặt khác A là trung điểm của MM_1 (2)



Từ (1) và (2) ta có: AI là đường trung bình của tam giác MM_1M_3, suy ra I là trung điểm của MM_3 và I cố định (vì ABCI là hình bình hành), do đó $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_3} = \vec{0}$, tức là $Đ_I(M) = M_3$, hay phép biến hình F biến M thành M_3 là phép đối xứng tâm (hình trên).

b) Vì M thuộc (O) nên M_3 thuộc đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Bài 6. Gọi F là phép biến hình có tính chất sau đây: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc là phép vị tự.

Hướng dẫn giải

- Với k = 1 ta có: $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MN'} + \overrightarrow{N'N}$

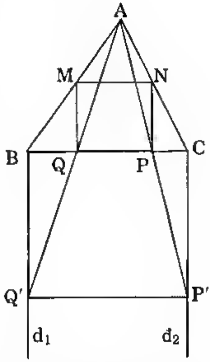
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ nên F là phép tịnh tiến.

- Với k ≠ 1, ta chứng minh được NN' cắt MM' tại một điểm, gọi điểm đó là O để thấy MN // M'N', do đó $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = k.\overrightarrow{ON}$ với mọi cặp điểm (M, N). Vậy F là phép vị tự (điểm O cố định).

Bài 7. a) Cho tam giác ABC và hình vuông MNPQ (như hình 27 – SGK). Gọi V là phép vị tự tâm A tỉ số $k = \frac{AB}{AM}$. Hãy dựng ảnh của hình vuông MNPQ qua phép vị tự V.

b) Từ bài toán ở câu a) hãy suy ra cách giải bài toán sau: Cho tam giác nhọn ABC, hãy dựng hình vuông MNPQ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \frac{AB}{AM}.\overrightarrow{AM}$ nên $B = V_{(A, \frac{AB}{AM})}(M)$

Tương tự $C = V_{(A, \frac{AB}{AM})}(N)$ (vì $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$)

Từ B, C dựng d_1 // MQ; d_2 // NP.

Khi đó: $\frac{AB}{AM} = \frac{AQ'}{AQ}$ suy ra:

$$\overrightarrow{AQ'} = \frac{AQ'}{AQ}.\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ'} = \frac{AB}{AM}.\overrightarrow{AQ}$$

hay $Q' = V_{(A, \frac{AB}{AM})}(Q)$

Tương tự $P' = V_{(A, \frac{AB}{AM})}(P)$

Vậy hình vuông BCP'Q' là ảnh của hình vuông MNPQ qua phép vị tự: $V_{(A, \frac{AB}{AM})}$ (hình bên)

b) Từ câu a) ta suy ra cách dựng hình vuông MNPQ có hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và M, N lần lượt nằm trên cạnh AB, AC như sau:

Dựng hình vuông BCP'Q'; khi đó Q, P lần lượt là giao điểm của BC với AQ' và AP'; M, N lần lượt là giao điểm của các đường thẳng đi qua Q, P và vuông góc với BC với các cạnh AB và AC. Khi đó MNPQ là hình vuông thỏa mãn các điều kiện trên (Thật vậy: tứ giác MNPQ là ảnh của hình vuông BCP'Q' qua phép vị tự tâm A, tỉ số $k' = \frac{AB}{AM}$ nên tứ giác MNPQ là hình vuông).

Bài 8. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM; N là trung điểm của CQ

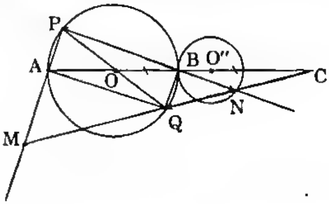
b) Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Hướng dẫn giải

a) Ta có tứ giác APBQ là hình bình hành nên AP // BQ

Suy ra BQ // AM (1)

Mặt khác C đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của AC (2)



Từ (1) và (2) ta có BQ là đường trung bình của ΔCAM hay Q là trung điểm của CM

Tương tự: BN là đường trung bình của ΔCAQ hay N là trung điểm của CQ.

b) Ta có $\frac{CB}{CA} = \frac{CQ}{CM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ}$ hay M là ảnh của Q qua phép vị tự tâm C tỉ số $k = 2$, mặt khác Q thuộc (O) nên M thuộc (O′) là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự trên.

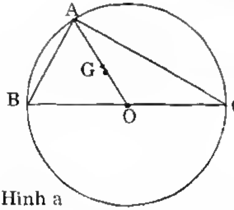
Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn (O′) là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm A tỉ số $k = 2$.

Tương tự ta có: $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$ hay N là ảnh của P qua phép vị tự tâm B tỉ số $k = -\frac{1}{2}$. Vì P thuộc đường tròn (O), nên:

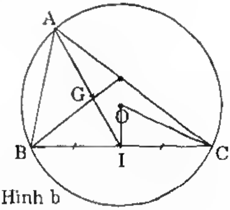
Quỹ tích của N là đường tròn (O″) là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự tâm B tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ (hình trên).

Bài 9. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O; R) có độ dài không đổi BC = m. Tìm quỹ tích các điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Hướng dẫn giải



Hình a



Hình b

* *Trường hợp 1:* BC = m = 2R, khi đó BC là đường kính của (O; R), dễ thấy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ (1). Vì A, O cố định nên từ (1) $\Rightarrow$ G cố định. Quỹ tích cần tìm là điểm G cố định thỏa mãn (1)

* *Trường hợp 2:* BC = m < 2R

Gọi I là trung điểm của BC, ta có OI $\perp$ BC và $OI^2 = OC^2 - IC^2$

$\Leftrightarrow \quad OI^2 = R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$, suy ra OI có độ dài không đổi

Do đó quỹ tích của điểm I là đường tròn tâm O bán kính $R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}$. Mặt khác: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, suy ra G là ảnh của I qua phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$ mà I thuộc đường tròn (O; R_1) nên quỹ tích của điểm G là đường tròn (O_2; R_2) là ảnh của đường tròn (O; R_1) qua phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

(A) Không có phép tịnh tiến nào;

(B) Có duy nhất một phép tịnh tiến;

(C) Chỉ có hai phép tịnh tiến;

(D) Có rất nhiều phép tịnh tiến.

Giải

Với mỗi điểm A thuộc d và A' thuộc d' ta có một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến d thành d', nên có rất nhiều phép tịnh tiến biến d thành d'. Vậy đáp án (D) là đúng.

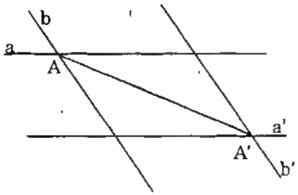
Câu 2. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó a // a'; b // b'; a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

(A) Không có phép tịnh tiến nào; (B) Có duy nhất một phép tịnh tiến;

(C) Chỉ có hai phép tịnh tiến; (D) Có rất nhiều phép tịnh tiến.

Giải

Gọi A là giao điểm của a và b. Giả sử có phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến a thành a' và b thành b', gọi $A' = T_{\vec{v}}(A)$. Do A là giao điểm của a và b nên A' cũng là giao điểm của a' và b'



$\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy tồn tại duy nhất phép tịnh tiến biến a và b lần lượt thánh a' và b', đáp án (B) đúng.

Câu 3. Cho hai đường thẳng cắt nhau đ và đ'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng đ thành đường thẳng d'?

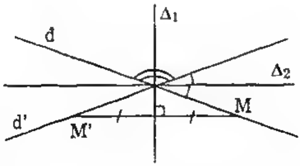
(A) Không có phép đối xứng trục nào;

(B) Có duy nhất một phép đối xứng trục;

(C) Chỉ có hai phép đối xứng trục;

(D) Có rất nhiều phép đối xứng trục.

Giải



Giả sử có phép đối xứng trục $Đ_\Delta$ biến d thành đ', gọi M là điểm nằm trên đ và $M' = Đ_\Delta(M)$ do đó Δ là đường trung trực của đoạn thẳng MM' suy ra Δ là đường phân giác của góc tạo bởi d và đ'.

Mà đ và d' cắt nhau tạo nên hai cặp góc bằng nhau nên có hai đường phân giác, do đó tồn tại hai phép đối xứng trục biến d thành d'. Vậy đáp án (C) là đúng.

Câu 4. Trong các hình sau đây, hình nào có 4 trục đối xứng?

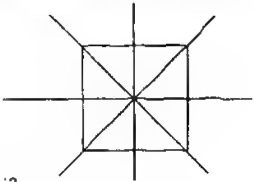
(A) Hình bình hành; (B) Hình chữ nhật;

(C) Hình thoi; (D) Hình vuông.

Giải

Trong các hình trên thì chỉ có hình vuông có bốn trục đối xứng đó là các đường thẳng đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện và đường chéo của hình vuông.

Vậy đáp án (D) đúng.



Nhận xét: Hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi có thể là hình vuông nên các hình ấy, trong những trường hợp riêng cụ thể vẫn có thể có 4 trục đối xứng.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau có trục đối xứng;

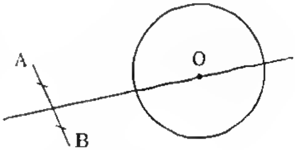
(B) Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tùy ý có trục đối xứng;

(C) Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tùy ý có trục đối xứng;

(D) Hình gồm một tam giác cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó có trục đối xứng.

Giải

Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng mà đường thẳng nối tâm của đường tròn và trung điểm của đoạn thẳng đó mà không vuông góc hoặc không chứa đoạn thẳng đó sẽ không có trục đối xứng. Vậy (B) là mệnh đề sai.



Câu 6. Trong các hình sau đây, hình nào không có tâm đối xứng?

(A) Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp;

(B) Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp;

(C) Hình lục giác đều;

(D) Hình gồm một hình vuông và một đường tròn nội tiếp.

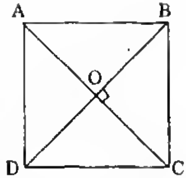
Giải

Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp không có tâm đối xứng vì tam giác đều không có tâm đối xứng. Vậy đáp án (B) đúng.

Câu 7. Cho hình vuông ABCD tâm O. Xét phép quay Q có tâm O và góc quay φ. Với giá trị nào sau đây của φ, phép quay Q biến hình vuông ABCD thành chính nó?

(A) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; (B) $\frac{\pi}{4}$; (C) $\frac{\pi}{3}$; (D) $\frac{\pi}{2}$.

Giải



Vì hai đường chéo của hình vuông vuông góc với nhau tại O nên $Q_{(O,\frac{\pi}{2})}(A) = B$, $Q_{(O,\frac{\pi}{2})}(B) = C$, $Q_{(O,\frac{\pi}{2})}(C) = D$, $Q_{(O,\frac{\pi}{2})}(D) = A$ nên $Q_{(O,\frac{\pi}{2})}$ biến hình vuông ABCD thành chính nó. Vậy đáp án (D) đúng.

Câu 8. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số k = 100 biến d thành d'?

(A) Không có phép nào; (B) Có duy nhất một phép;

(C) Chỉ có hai phép; (D) Có rất nhiều phép.

Giải

Với mỗi điểm M thuộc d, dựng đường thẳng Δ không song song với d cắt d' tại M', khi đó luôn tồn tại điểm O sao cho $\overrightarrow{OM'} = 100\overrightarrow{OM}$

Mặt khác qua O ta dựng được vô số đường thẳng Δ không song song với d. Vậy có vô số phép vị tự biến d thành d', do đó đáp án (D) là đúng.

Câu 9. Cho đường tròn (O; R). Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

(A) Có phép tịnh tiến biến (O; R) thành chính nó;

(B) Có phép vị tự biến (O; R) thành chính nó;

(C) Có phép đối xứng trục biến (O; R) thành chính nó;

(D) Trong ba mệnh đề A, B, C có ít nhất một mệnh đề sai.

Giải

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ biến (O; R) thành chính nó

Phép vị tự tâm O tỉ số –1 biến (O; R) thành chính nó

Phép đối xứng trục có trục là đường thẳng đi qua O biến (O; R) thành chính nó. Vậy đáp án (D) là sai.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

(A) Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn nằm ngoài hai đường tròn đó;

(B) Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn không nằm giữa hai tâm của hai đường tròn đó;

(C) Tâm vị tự trong của hai đường tròn luôn thuộc đoạn thẳng nối tâm của hai đường tròn đó ;

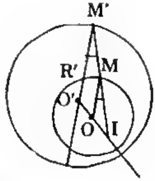
(D) Tâm vị tự của hai đường tròn có thể là điểm chung của hai đường tròn

Giải

Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn chứa nhau nằm trong hai hình tròn đó. Thật vậy:

Vì OM // O'M' nên

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{OI}{O'I} = \frac{R}{R'}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{O'O + OI}{OI} = \frac{R'}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{O'O}{OI} + 1 = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow \frac{O'O}{OI} = \frac{R' - R}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad OI = \frac{R}{R' - R}.O'O.$$ Để I nằm trong (O) thì OI < R

$$\Leftrightarrow \quad \frac{R}{R' - R}.O'O < R \Leftrightarrow \frac{O'O}{R' - R} < 1 \Leftrightarrow O'O < R' - R$$ bất đẳng thức này đúng vì (O') chứa (O). Vậy (A) sai.

Câu 11. Phép biến hình nào sau đây không có tính chất: "Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó"?

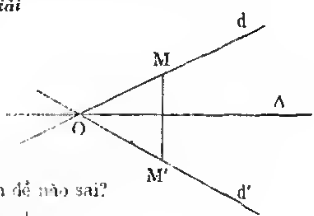
(A) Phép tịnh tiến; (B) Phép đối xứng tâm;

(C) Phép đối xứng trục; (D) Phép vị tự.

Giải

Phép đối xứng trục biến đường thẳng d không song song với trục thành đường thẳng d' đi qua giao điểm của d với trục.

Vậy đáp án (C) là đúng



Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Phép dời hình là một phép đồng dạng;

(B) Phép vị tự là một phép đồng dạng;

(C) Phép đồng dạng là một phép dời hình;

(D) Có phép vị tự không phải là phép dời hình.

Giải

Phép đồng dạng không phải là phép dời hình vì nó không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Vậy mệnh đề (C) sai.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	(D)	(B)	(C)	(D)	(B)	(B)	(D)	(D)	(D)	(A)	(C)	(C)

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

* Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

* Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

* Tính chất 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng

* Tính chất 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

* Tính chất 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng

2. Định lý:

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

* Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng

* Một mặt phẳng xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

* Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

4. Hình chóp và hình tứ diện

* Cho đa giác $A_1A_2....A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n để được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,....., SA_nA_1

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2....A_n$ gọi là hình chóp và kí hiệu là S. $A_1A_2.....A_n$

* Hình tứ diện là hình chóp có đáy là một tứ giác.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước;

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước;

c) Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

Trả lời

* Mệnh đề a) sai (Nếu ba điểm thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua)

* Mệnh đề b) đúng.

* Mệnh đề c) đúng.

Bài 2. Em hãy giải thích vì sao đồ vật có bốn chân như bàn, ghế,... thường dễ bị cập kênh.

Trả lời

Có một số nguyên nhân sau dẫn đến một số đồ vật có bốn chân như bàn, ghế, ... thường bị cập kênh.

* Do bốn chân của nó có chân ngắn, chân dài nên khi ta đặt chúng lên một mặt phẳng (chẳng hạn mặt phẳng là nền nhà) bốn chân đó không cùng nằm trên một mặt phẳng $\Rightarrow$ chúng bị cập kênh.

* Do nền nhà mà ta đặt chúng lên không thực sự phẳng (giả sử các chân ghế có độ dài bằng nhau) nên dẫn đến ghế, bàn,... bị cập kênh.

Nói tóm lại: Những đồ vật trên bị cập kênh do 4 điểm tiếp xúc của các chân đồ vật và sàn nhà không thực sự nằm trên một mặt phẳng.

Bài 3. Với một cái thước thẳng, làm thế nào để phát hiện một mặt bàn có phẳng hay không? Nói rõ căn cứ vào đâu mà ta làm như vậy?

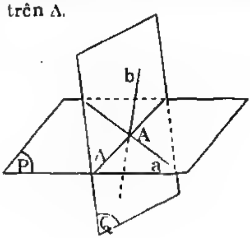
Trả lời

Để phát hiện được một mặt bàn có phẳng hay không bằng một cái thước thẳng, ta đặt cái thước lên mặt bàn, sau đó đẩy thước khắp mặt bàn, khi đó nếu tại mọi vị trí đẩy ta thấy thước và mặt bàn khít nhau thì mặt bàn phẳng, còn nếu thước và mặt bàn không khít nhau (thước bị vênh ra khỏi mặt phẳng bàn) thì mặt bàn không phẳng.

Cách làm trên căn cứ vào định lí: "Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó".

Bài 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.

Giải



Giả sử A là giao điểm của a và b. Ta phải chứng minh A nằm trên Δ là giao tuyến của (P) và (Q).

Thật vậy:

Ta có: $A \in a \Rightarrow A \in (P)$ (1)

$A \in b \Rightarrow A \in (Q)$ (2)

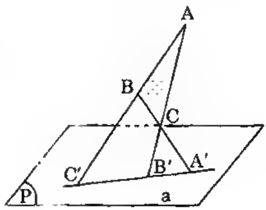
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ A là điểm chung của (P) và (Q)

$\Rightarrow$ A phải nằm trên Δ (đpcm).

Bài 5. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm không thẳng hàng A, B, C cùng nằm ngoài mặt phẳng (P). Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng AB, BC, CA đều cắt mp (P) thì các giao điểm đó thẳng hàng.

Giải

Giả sử các đường thẳng AB, BC, CA cắt (P) lần lượt tại C', A', B'. Vì A, B, C không thẳng hàng nên ta có mp (ABC) được xác định.



Các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB của mp (ABC) nên chúng cùng thuộc mp (ABC). Mặt khác mp (ABC) phân biệt với mp (P). Vậy A', B', C' thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (P), nghĩa là A', B', C' thẳng hàng.

Bài 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước.

b) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó.

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

Trả lời

* Mệnh đề a) sai
* Mệnh đề b) sai
* Mệnh đề c) đúng.

Bài 7. Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

a) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước.

b) Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

c) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

Trả lời

* Mệnh đề a) sai
* Mệnh đề b) đúng
* Mệnh đề c) sai.

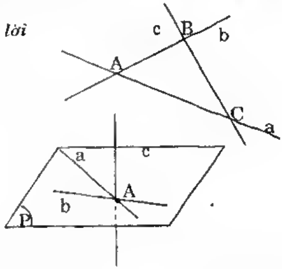
Bài 8. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Một đường thẳng c cắt cả a và b. Có thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng hay không?

Trả lời

Gọi A là giao điểm của a và b

* Nếu c không đi qua A thì ba đường thẳng a, b, c đồng phẳng.

* Nếu c đi qua A thì a, b, c có thể đồng phẳng hoặc không đồng phẳng.



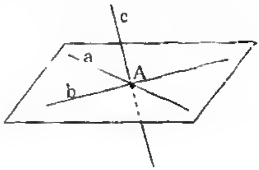
Bài 9. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng chúng đồng quy.

Giải

Gọi a, b, c là ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau. Giả sử:

$A = b \cap c$, $B = c \cap a$, $C = a \cap b$

Nếu ba điểm A, B, C phân biệt thì ba đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng, điều này trái với giả thiết. Vậy các điểm A, B, C phải trùng nhau, nghĩa là ba đường thẳng a, b, c đồng quy.



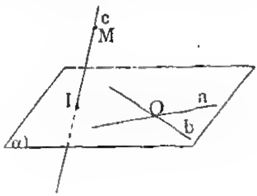
Chú ý: * Ba đường thẳng đồng quy có thể nằm trong một mặt phẳng (hay còn gọi là đồng phẳng) nhưng cũng có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng (hay còn gọi là không đồng phẳng).

* Có thể tổng quát hóa bài toán trên như sau: Nếu n đường thẳng ($n \geq 3$) đôi một cắt nhau mà không đồng phẳng thì đồng quy.

Bài 10. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm O và đường thẳng c cắt mp (a, b) ở điểm I khác O. Gọi M là một điểm di động trên c khác I. Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng (M, a) và (M, b) nằm trên một mặt phẳng cố định.

Giải

Hai mặt phẳng (M, a) và (M, b) có hai điểm chung là M và O nên giao tuyến của chúng là đường thẳng MO.



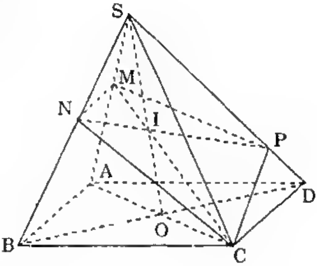
Khi M di động trên c, giao tuyến MO này luôn luôn nằm trong mặt phẳng (O, c) cố định.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD nằm trong mp (P) và một điểm S nằm ngoài (P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A; N là điểm nằm giữa S và B; giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O.

a) Tìm giao điểm của mp (CMN) với đường thẳng SO.

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

Giải



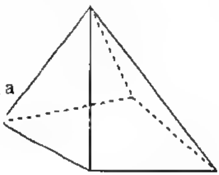
a) Chọn mp (SAC) chứa SO và dễ thấy hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) có hai điểm chung là C và M nên giao tuyến của chúng là CM. Từ đó ta gọi I là giao điểm của CM và SO thì I cũng là giao điểm của mp (CMN) với đường thẳng SO.

b) Trong mp (SBD) kéo dài NI cắt SD tại P khi đó ta có M và P là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN)

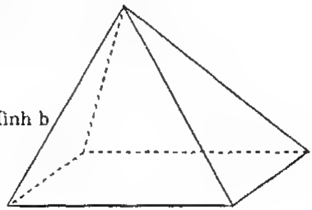
Vậy MP là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Bài 12. Vẽ hình biểu diễn của một hình chóp tứ giác trong các trường hợp đáy là tứ giác lồi, đáy là hình bình hành, đáy là hình thang.

Giải



Hình a

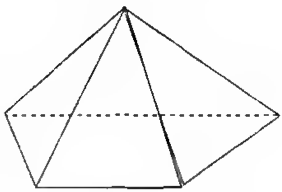


Hình b

* Hình a) là hình biểu diễn của một hình chóp có đáy là một tứ giác lồi.

* Hình b) là hình biểu diễn của một hình chóp có đáy là một hình bình hành.

* Hình c) là hình biểu diễn của một hình chóp có đáy là một hình thang.



Hình c

Bài 13. Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không?

Trả lời

Tứ diện là hình có bốn mặt. Như vậy thiết diện của tứ diện khi cắt bởi một mặt phẳng chỉ có thể là một tam giác hoặc một tứ giác, không thể là một ngũ giác.

Bài 14. Dùng bìa cứng cắt và dán lại để thành:

a) Một tứ diện đều;

b) Một hình chóp tứ giác có đáy là hình vuông và các mặt bên là những tam giác đều.

Trả lời

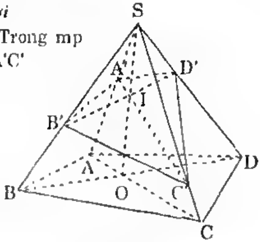
(Học sinh tự cắt)

a) Lưu ý hình tứ diện đều là một tứ diện có đáy là tam giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đáy, các mặt bên là những tam giác cân.

b) Tương tự câu a).

Bài 15. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm A', B', C' lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với S, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (A'B'C')

Trả lời



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mp (SAC), gọi I là giao điểm của SO và A'C'

⇒ I nằm trên mp (A'B'C')

Trong mp (SBD) kéo dài B'I cắt SD tại D' thì D' là giao điểm của SD với mp (A'B'C')

Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (A'B'C') là tứ giác A'B'C'D'.

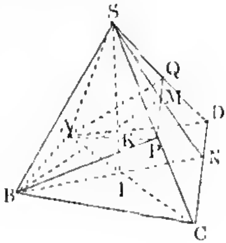
Bài 16. Cho hình chóp SABCD. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC)

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp (SAC)

c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (ABM).

Trả lời



a) Trong mp(SCD) kéo dài SM cắt CD tại N, nối BN và AC cắt nhau tại I. Khi đó S và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và mp(SBM)

⇒ giao tuyến của chúng là đường thẳng SI.

b) Theo câu a) ta có SI là giao tuyến của (SBM) và (SAC) mà BM $\subset$ (SBM)

$\Rightarrow$ Giao điểm K của SI và BM chính là giao điểm của BM và mp(SAC)

c) Trong mặt phẳng (SAC), kéo dài AK cắt SC tại P, nối BP, kéo dài PM cắt SD tại Q sau đó nối A với Q. Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác ABPQ.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì điểm chung đó là duy nhất;

(B) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất;

(C) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất;

(D) Cả (A), (B), (C) đều sai.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) Có vô số mặt phẳng đi qua bốn điểm không thẳng hàng cho trước;

(B) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua bốn điểm không thẳng hàng cho trước;

(C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước;

(D) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Câu 3. Cho tứ giác ABCD nằm trong mp(P) có hai cạnh AB và CD không song song, cắt nhau tại E. Gọi S là một điểm nằm ngoài mp(P) và M là trung điểm của đoạn SC. Giao điểm của SD và mp(MAB) là:

(A) Giao điểm của SC và EM; (B) Giao điểm của SC và SD;

(C) Giao điểm của AB và DC; (D) Giao điểm của SD và EM.

Câu 4. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là:

(A) Đường thẳng IK; (B) Đường thẳng IB;

(C) Đường thẳng KD; (D) Đường thẳng AB.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác SABCD và một mặt phẳng (α). Khẳng định nào sau đây là đúng về thiết diện của hình chóp và (α).

(A) Thiết diện không thể là một tam giác;

(B) Thiết diện có thể là một tam giác;

(C) Thiết diện không thể là một ngũ giác;

(D) Thiết diện có thể là một lục giác.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(C)	(D)	(A)	(B)

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

2. Tính chất về hai đường thẳng song song

- Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó)

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 17. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

c) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

d) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

Trả lời

- Mệnh đề a) đúng.
- Mệnh đề b) sai (chúng có thể song song)
- Mệnh đề c) sai (chúng có thể cắt nhau; trùng nhau)
- Mệnh đề d) đúng.

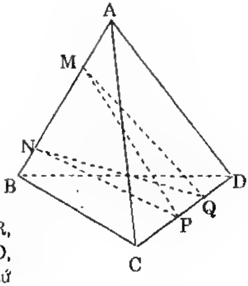
Bài 18. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MQ, NP và vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ

Giải

Do AB và CD là hai cạnh đối của hình chóp ABCD

⇒ AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau ⇒ Bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng

⇒ MQ, NP chéo nhau và MP, NQ cũng chéo nhau.



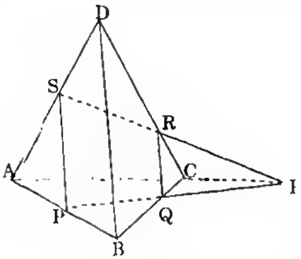
Bài 19. Cho tứ diện ABCD. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng:

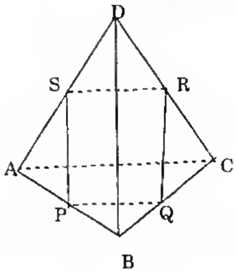
a) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

b) Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PS, RQ, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

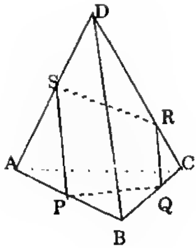
Giải

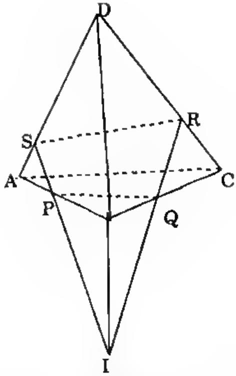
a) Vì bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng nên tồn tại một mp(α) chứa bốn điểm đó. Ba mặt phẳng (α), (DAC), (BAC) có giao tuyến là SR, PQ và AC. Như vậy ba đường thẳng đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.





b) Tương tự a), ba đường thẳng PS, RQ, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.





Bài 20. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với cạnh AD nếu:

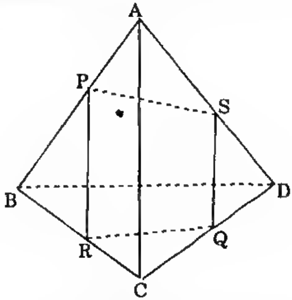
a) PR // AC.

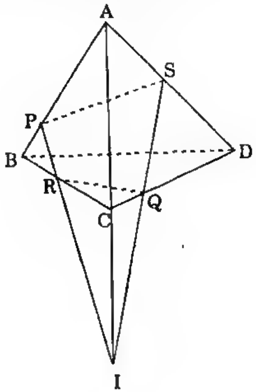
b) PR cắt AC.

Giải

a) Nếu PR // AC thì mặt phẳng (PQR) sẽ cắt cạnh AD tại điểm S sao cho QS // PR.

Như vậy ta sẽ có bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng





b) Nếu PR cắt AC tại một điểm I, khi đó IQ là giao tuyến của mp(PQR) và mặt phẳng (ACD). Đường thẳng IQ cắt AD tại S.

Vậy S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD.

Bài 21. Cho tứ diện ABCD. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mp (PQR) và cạnh AD

Chứng minh rằng AS = 2SD.

Giải

Trong mặt phẳng (ABC), gọi I là giao điểm của PR và AC. Gọi S là giao điểm của IQ và AD, ta có S là giao điểm của AD và mp(PQR).

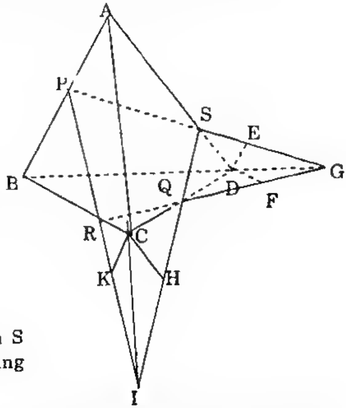
Trong mặt phẳng (ABC), kẻ CK // AB với K nằm trên IP. Ta có:

$\frac{CK}{BP} = \frac{RC}{RB} = \frac{1}{2}$. Vì BP = AP nên: $\frac{CK}{AP} = \frac{1}{2}$. Vậy C là trung điểm đoạn AI hay $\frac{IC}{IA} = \frac{1}{2}$

Trong mặt phẳng (ACD), từ C ta kẻ CH // AD, với H nằm trên IS. Ta có: $\frac{CH}{AS} = \frac{IC}{IA} = \frac{1}{2}$. Mặt khác, do hai tam giác QHC và QSD bằng nhau nên CH = SD

Do đó ta suy ra AS = 2SD

**Chú ý:* Ta có thể tìm giao điểm S của cạnh AD với mp(PQR) bằng cách khác như sau:



Gọi G là giao điểm của RQ và BD, ta có S là giao điểm của AD và PG. Và như vậy S là giao điểm của AD và mp(PQR). Sau đó kẻ DF // BC và chứng minh $\frac{DF}{BR} = \frac{1}{2}$. Do đó ta suy ra $\frac{GD}{GB} = \frac{1}{2}$. Từ D kẻ DE // AB, ta có $\frac{DE}{BP} = \frac{1}{2} = \frac{DE}{AP}$ và suy ra AS = 2SD.

Bài 22. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng dường thẳng đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối điện với đỉnh ấy.

b) Gọi A′ là trọng tâm của mặt BCD. Chứng minh rằng GA = 3GA′

Giải

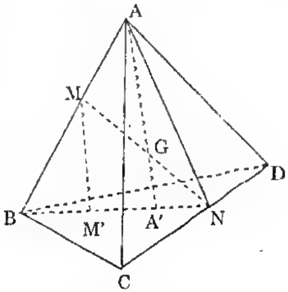
a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD và trọng tâm G của tứ diện sẽ là trung điểm của MN.

Trong tam giác ABN, gọi $A' = BN \cap AG$. Ta cần chứng minh A' là trọng tâm của ΔBCD.

Ta có điểm A' nằm trên trung tuyến BN của ΔBCD. Nếu từ M ta kẻ MM' // AA' với M' nằm trên BN, ta có MM' là đường trung bình của tam giác ABA'.

Mặt khác GA' là đường trung bình của tam giác MM'N. Do đó ta có:

$$BM' = M'A' = A'N.$$



Như vậy A' là trọng tâm của ΔBCD.

Tương tự các đường thẳng BG, CG, DG theo thứ tự đi qua trọng tâm B', C', D' của các tam giác CDA, DAB, ABC.

b) Ta có $GA' = \frac{1}{2}MM'$ mà $MM' = \frac{1}{2}AA'$ nên $GA' = \frac{1}{4}AA'$

Từ đó suy ra $GA = 3GA'$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác;

(B) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì song song;

(C) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không có điểm chung;

(D) Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau;

(B) Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau;

(C) Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau;

(D) Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA và SB. Vị trí tương đối của HK và CD là:

(A) Trùng nhau; (B) Cắt nhau;

(C) Song song; (D) Chéo nhau.

Câu 4. Với giả thiết ở câu 3. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và mp(SCD) là:

(A) Đường thẳng AB; (B) Đường thẳng CD;

(C) Đường thẳng HK;

(D) Đường thẳng d đi qua S và song song với CD.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng a (a > 0). Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

(A) a^2; (B) $\frac{a^2}{2}$; (C) $\frac{a^2}{4}$; (D) $\frac{a^2}{16}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(C)	(C)	(D)	(C)

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên (P) thì a song song với (P)

3. Tính chất

- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.
- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.
- Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a, có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 23. Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mp(P). Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

a) a và b song song với nhau;

b) a và b chéo nhau;

c) a và b có thể cắt nhau;

d) a và b trùng nhau;

e) các mệnh đề a), b), c) và d) đều sai.

Trả lời

- Mệnh đề a) sai (chúng có thể chéo nhau, cắt nhau, trùng nhau)
- Mệnh đề b) sai (chúng có thể song song, cắt nhau, trùng nhau)
- Mệnh đề c) đúng
- Mệnh đề d) sai
- Mệnh đề e) sai.

Bài 24. Cho mp(P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

a) Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b;

b) Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b;

c) Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b;

d) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b;

e) Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b;

f) Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b;

Trả lời

- Mệnh đề a) sai.
- Mệnh đề b) đúng.
- Mệnh đề c) sai.
- Mệnh đề d) đúng.
- Mệnh đề e) sai.
- Mệnh đề f) đúng.

Bài 25. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mp(BCD)

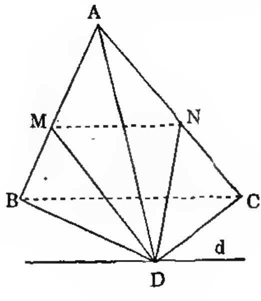
b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Xét vị trí tương đối của d và mp (ABC).

Giải

a) Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC nên MN là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow$ MN // BC $\Rightarrow$ MN // mp(BCD)

b) Hai mặt phẳng (DMN) và mp(DBC) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là MN và BC mà chúng có một điểm chung là D



=> giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng qua D và song song với MN và BC.

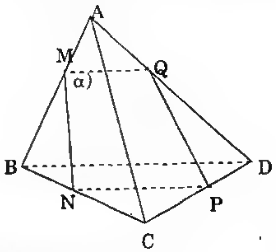
Như vậy ta có d // mp(ABC)

Bài 26. Khi cắt tứ diện bằng một mặt phẳng thì thiết diện nhận được có thể là những hình nào sau đây?

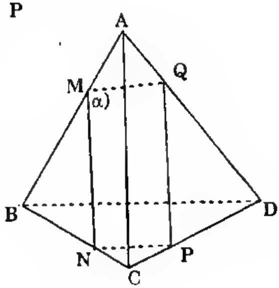
a) Hình thang; b) Hình bình hành; c) Hình thoi.

Trả lời

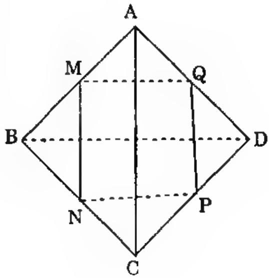
a) Nếu (α) là mặt phẳng cắt tứ diện và song song với chẳng hạn BC thì ta có thiết diện MNPQ là một hình thang (có MQ // NP)



b) Nếu (α) là mặt phẳng cắt tứ diện và song song với AC và BD thì ta có thiết diện MNPQ là một hình bình hành.



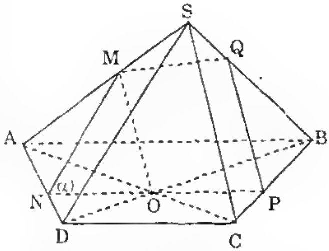
c) Hình thoi là một trường hợp đặc biệt của hình bình hành. Như vậy thiết diện của (α) và tứ diện có thể là hình thoi. Chẳng hạn khi tứ diện là tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng nhau và (α) là mặt phẳng di qua trung diểm của các cạnh.



Bài 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì?

Giải

Do mặt phẳng (α) đi qua O và song song với AB nên (α) cắt (ABCD) theo giao tuyến là đường thẳng qua O và song song với AB, đường này cắt AD, BC tại N và P, do (α) // SC nên giao tuyến cua (α) và (SBC) là đường thẳng qua P, song song với SC và cắt SB tại Q, mặt phẳng (α) cắt (SAB) theo giao tuyến đi qua Q và song song với AB, cắt SA tại M. Vậy thiết diện là tứ giác MNPQ.

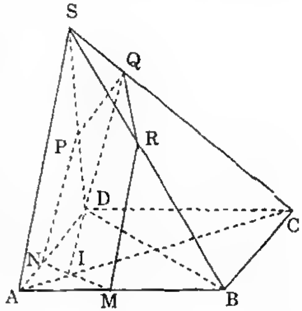


Do MQ // AB, NP // AB $\Rightarrow$ MQ // NP $\Rightarrow$ thiết diện là hình thang.

Bài 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.

Giải

Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và song song với BD và SA nên cắt các mặt phẳng (ABS), (ADS), (ACS) theo các giao tuyến song song với các đường thẳng đó. Qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt AD tại N và AC tại I. Qua M, I, N vẽ các đường thẳng song song với SA lần lượt cắt SB, SC, SD tại R, Q, P. Ta được thiết diện là ngũ giác MNPQR có MR // NP.



III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng a, b và mp(α), biết a // (α), b // (α). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) a song song với b;

(B) a có thể trùng với b;

(C) a và b chéo nhau;

(D) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Một đường thẳng a song song với (α) thì a song song với mọi đường thẳng nằm trong mp (α);

(B) Một đường thẳng a song song với (α) thì a và (α) không có điểm chung;

(C) Một đường thẳng a song song với (α) thì a và b chéo nhau với mọi đường thẳng b nằm trong (α);

(D) Cả (A), (B), (C) đều sai

Câu 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm nằm trong ΔABC, (α) là mặt phẳng đi qua M song song với AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của (α) và tứ diện.

(A) Thiết diện là hình vuông; (B) Thiết diện là hình thang cân;

(C) Thiết diện là hình bình hành; (D) Thiết diện là hình chữ nhật.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và (ABCD) là:

(A) MN nằm trên (ABCD); (B) MN cắt (ABCD);

(C) MN song song với (ABCD); (D) MN và (ABCD) chéo nhau.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Đáy cạnh bằng 10, M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

(A) $\frac{400}{9}$; (B) $\frac{20}{3}$; (C) $\frac{4}{9}$; (D) $\frac{16}{9}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(B)	(C)	(C)	(A)

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

3. Tính chất

- Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.
- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mp (P) song song với mp (Q).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

4. Định lý Ta-lét

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

5. Định lý Ta-lét đảo

Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Khi đó, ba đường AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau;

c) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia;

d) Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia;

e) Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau;

f) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

Trả lời

* Mệnh đề a) sai (chúng có thể cắt nhau)
* Mệnh đề b) đúng.
* Mệnh đề c) đúng.
* Mệnh đề d) sai (chúng có thể chéo nhau)

* Mệnh đề e) sai (chúng có thể cắt nhau)

* Mệnh đề f) đúng.

Bài 30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hình hộp là một hình lăng trụ;

b) Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song;

c) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau;

d) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành;

e) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau.

Trả lời

* Mệnh đề a) đúng (Hình hộp là một hình lăng trụ có đáy là hình bình hành).

* Mệnh đề b) sai (các cạnh đáy không song song với nhau)

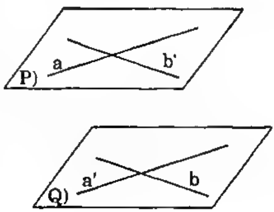
* Mệnh đề c) sai (các mặt bên có thể không bằng nhau)

* Mệnh đề d) đúng.

* Mệnh đề e) đúng (các mặt đối diện là các hình bình hành bằng nhau)

Bài 31. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

Giải

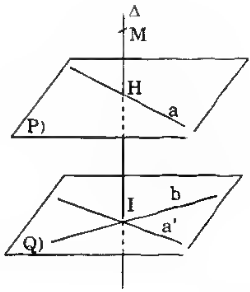


Gọi b' là đường thẳng cắt a và song song với b, ta có mặt phẳng (a, b'). Gọi a' là đường thẳng cắt b và song song với a, ta có mặt phẳng (a', b). Rõ ràng hai mặt phẳng (a, b') và (b, a') aong song.

Nếu có mặt phẳng (P) đi qua a, mặt phẳng (Q) đi qua b mà (P) // (Q) thì (P) phải chứa b' và (Q) phải chứa a'. Do đó (P) trùng với mp(a, b') và (Q) trùng với mp(b, a') nghĩa là (P) và (Q) được xác định duy nhất.

Bài 32. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.

Giải



Trong mp(Q), dựng đường thẳng a' song song với a và cắt b tại I, do a // a' nên a và a' đồng phẳng.

Dựng đường thẳng Δ qua M và I, đường thẳng này phải cắt a tại H. Như vậy tồn tại Δ cắt cả a và b. Nếu còn có một đường thẳng Δ' đi qua M và cắt cả a và b thì ta dễ suy ra Δ' ≡ Δ

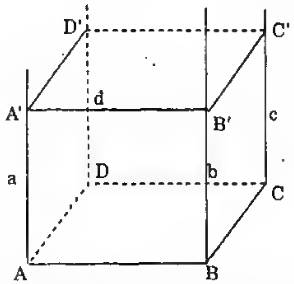
⇒ Δ là duy nhất.

Bài 33. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D'. Chứng minh rằng A'B'C'D' là hình bình hành.

Giải

Do AB // DC nên ta có hai mặt phẳng song song là (AA', BB') và (CC', DD'). Mặt phẳng (A'B'C'D') cắt hai mặt phẳng song song nói trên theo hai giao tuyến song song với nhau là A'B' và C'D'. Tương tự trên ta có A'D' // B'C'.

Do đó tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

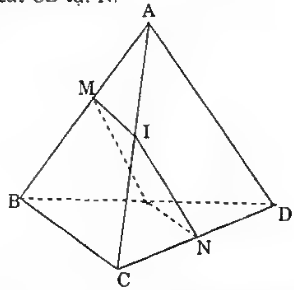


Bài 34. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua điểm M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không? Tại sao?

Giải

Do mp(P) qua M và song song với BC nên (P) cắt mp (ABC) theo giao tuyến qua M và song song với BC, giao tuyến này cắt AC tại I. Lại do (P) song song AD nên giao tuyến của (P) và (ACD) là đường thẳng qua I và song song với AD đường thẳng này cắt CD tại N.

Do M là trung điểm AB suy ra I là trung điểm của AC suy ra N là trung điểm của CD.

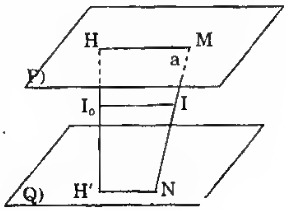


Bài 35. Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\frac{IM}{IN} = k$, $k \neq 0$ cho trước.

Giải

Gọi H là một điểm bất kỳ trên (P), H' là điểm bất kỳ trên (Q). I_0 là điểm trên HH' sao cho $\frac{I_0H}{I_0H'} = k$ $(k \neq 0)$

Khi đó với mọi điểm I trên MN thỏa mãn $\frac{IM}{IN} = k$ $(k \neq 0)$ ta luôn có II_0 // HM // H'N suy ra I_0I // (P) và I_0I // (Q). Vậy quỹ tích điểm I là mặt phẳng qua I_0 và song song với (P) và (Q).



Bài 36. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

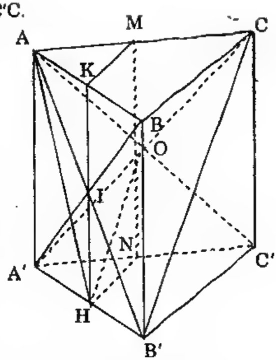
a) Chứng minh rằng đường thẳng CB song song với mp (AHC')

b) Tìm giao tuyến d của hai mp (AB'C') và mp (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mp (BB'C'C).

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mp(H, d).

Giải

a) Gọi O là tâm của hình bình hành AA'C'C.



Tam giác A'B'C có HO là đường trung bình nên HO // B'C. Đường thẳng CB' không thuộc mặt phẳng (AHC') và song song với đường thẳng HO thuộc mặt phẳng đó nên CB' // mp (AHC').

b) Gọi I là tâm của hình bình hành ABB'A'. Hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC) có hai điểm chung là I và O.

Vậy giao tuyến d cần tìm của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC) là đường thẳng IO.

c) Mặt phẳng (H, d) chính là mặt phẳng (HIO). Mặt phẳng này chứa HI // BB' và IO // BC nên song song với mặt bên (BCC'B').

Đường thẳng qua O song song với AA' lần lượt cắt AC và A'C' tại M và N. Đường thẳng HI cắt AB tại K. Vậy thiết diện cắt hình lăng trụ bởi mp (H, d) là hình bình hành MNHK có các cạnh song song với các cạnh của mặt bên (BCC'B').

Bài 37. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng

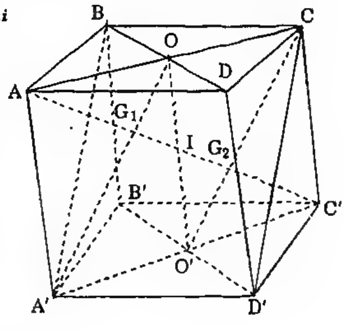
a) mp (BDA') // mp(B'D'C)

b) Đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B cùng nằm trên một mặt phẳng.

Giải



a) Ta có BD // B'D', BA' // CD'.

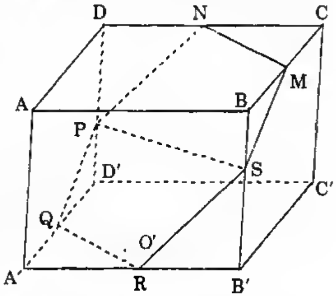
Do đó hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b) Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABCD và A'B'C'D'.

Đường chéo AC' nằm trong mặt phẳng (AA'C'C) và cắt mặt phẳng (BDA') tại G_1. Điểm I là tâm hình bình hành ACC'A' đồng thời cũng là tâm của hình hộp

Ta có G_1 là trọng tâm của tam giác ACA′ nên $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3}$.

Đối với tam giác BDA′ ta có A′O là trung tuyến và do $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác BDA′. Tương tự ta chứng minh được G_2 là trọng tâm của tam giác B′D′C.



c) Ta có A′O // O′C và AA′C′C là hình bình hành. Do đó suy ra G_1 là trung điểm của AG_2 và G_2 là trung điểm của $C'G_1$.

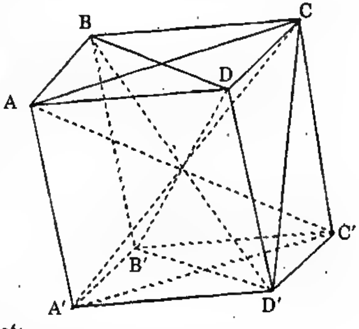
Vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$ nghĩa là G_1 và G_2 chia đoạn AC′ thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, DD′, D′A′, A′B′, B′B. Ta có MN // BD và PS // BD nên MN // PS.

Gọi (α) là mặt phẳng (MN, PS) để ý rằng SR // A′B // D′C // PN, hay SR // NP. Vậy điểm S thuộc mp (α). Tương tự ta chứng minh được Q ∈ mp(α)

Bài 38. Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

Giải



Ta đã biết rằng đối với một hình bình hành, tổng bình phương hai đường chéo bằng tổng bình phương các cạnh. Do đó, xét hình bình hành ACC′A′, ta có:

$$AC'^2 + A'C^2 = 2(AC^2 + AA'^2)$$

Đối với hình bình hành BDD′B′, ta có:

$$BD'^2 + B'D^2 = 2(BD^2 + BB'^2)$$

Từ đó suy ra:

$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2$$
$$= 2(AC^2 + BD^2) + 4AA'^2$$

Đối với hình bình hành ABCD, ta có:

$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Do đó $2(AC^2 + BD^2) = 4(AB^2 + BC^2)$

Vậy $AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4(AB^2 + BC^2 + AA'^2)$ (đpcm).

Bài 39. Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C' có đáy lớn ABC và các cạnh bên AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', B'C', C'A'. Chứng minh rằng MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.

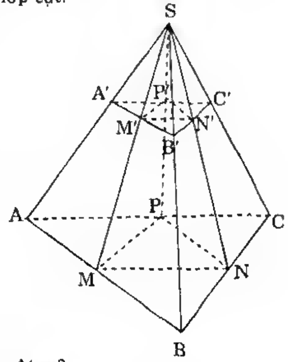
Giải

Ta có M'N' // MN, vì chúng là giao tuyến của hai mặt phẳng song song (ABC) và (A'B'C') cắt bởi mp (MNN'M')

Tương tự ta chứng minh được:

NP // N'P', MP // M'P'

Như vậy MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.



III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song;

(B) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau;

(C) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó;

(D) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau;

(B) Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song;

(C) Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều;

(D) Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một song song;

(B) Các cạnh bên của hình chóp cụt là các hình thang cân;

(C) Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng;

(D) Cả (A), (B), (C) đều sai.

Câu 4. Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đá giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

(A) 3 cạnh; **(B)** 4 cạnh; **(C)** 5 cạnh; **(D)** 6 cạnh.

Câu 5. Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

(A) 4 cạnh; (B) 5 cạnh; (C) 6 cạnh; (D) 7 cạnh.

IV. ĐÁP ÁN

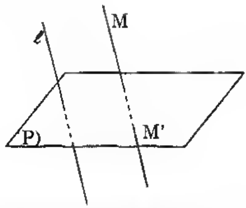
Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(C)	(C)	(B)	(C)

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M′ của mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.



2. Tính chất

- Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng
- Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng, của một tia là một tia.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

- Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.
- Nếu trên hình $\mathcal{H}$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng chẳng những được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau), mà tỉ số của hai đoạn thẳng này còn phải bằng tỉ số của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình $\mathcal{H}$.
- Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường elíp hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể một đoạn thẳng.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

Trả lời

* Mệnh đề a) sai (Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau không thể trùng nhau).
* Mệnh đề b) sai (chúng có thể song song)
* Mệnh đề c) đúng (chúng có thể song song)
* Mệnh đề d) sai.

Bài 41. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.

d) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó.

e) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.

f) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

Trả lời

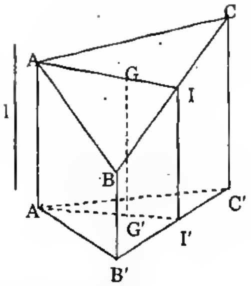
* Mệnh đề a) sai (hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau chỉ có thể cắt nhau hoặc trùng nhau).
* Mệnh đề b) đúng.
* Mệnh đề c) đúng
* Mệnh đề d) đúng.
* Mệnh đề e) sai (nó có thể cắt, song song hoặc trùng)
* Mệnh đề f) đúng.

Bài 42. Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu là trọng tâm tam giác A'B'C'.

Giải

Ta đã biết rằng phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng. Giả sử ΔABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và G là trọng

tâm của ΔABC. Qua phép chiếu song song thì điểm I có hình chiếu là I' (I' $\in$ B'C') và G có hình chiếu là G' $\in$ A'I'

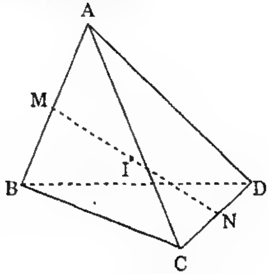


Ta có $\frac{AG}{AI} = \frac{2}{3}$ nên $\frac{A'G'}{A'I'} = \frac{2}{3}$

Do đó G' là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.
Vậy qua phép chiếu song song, trọng tâm G của ΔABC có hình chiếu là trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$.

Bài 44. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện và trọng tâm của nó

Giải



Tứ diện ABCD có thể xem là hình biểu diễn của một tứ diện nào đó. Ngoài ra ta có M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN. Như vậy điểm I là điểm biểu diễn cho trọng tâm của tứ diện đó.

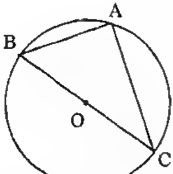
Chú ý: Ta có thể biểu diễn bằng các hình khác.

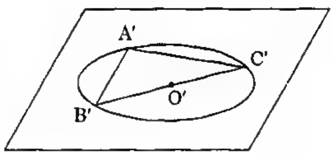
Bài 44. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

Giải

* Tam giác vuông ABC (vuông tại A) nội tiếp đường tròn (O), ta nhận thấy cạnh BC đi qua tâm O của đường tròn, từ đó suy ra cách vẽ hình biểu diễn của tam giác vuông ABC nội tiếp đường tròn (O) như sau:

Vẽ elip (E), vẽ tam giác A'B'C' có ba đỉnh nằm trên (E) và cạnh BC đi qua tâm O' của elip (E). Như vậy ta được hình biểu diễn cần tìm.

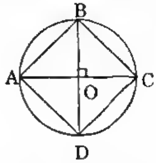




Bài 45. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

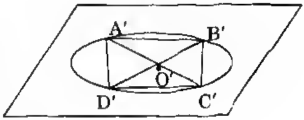
Giải

Hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O), ta nhận thấy AC và BD cắt nhau tại tâm O của đường tròn, 4 điểm A, B, C, D nằm trên (O).



Từ đó suy ra cách vẽ hình biểu diễn của hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O) như sau:

Vẽ elip (E) có tâm là O′, vẽ hai đường thẳng cắt nhau tại O′ và cắt (E) tại bốn điểm A′, B′, C′, D′. Như vậy ta được hình biểu diễn cần vẽ.



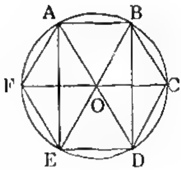
Bài 46. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Giải

Phân tích hình lục giác đều ABCDEF ta nhận thấy:

Tứ giác OABC là hình bình hành (vừa là hình thoi)

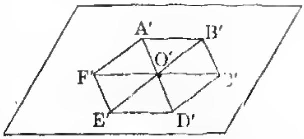
Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O.



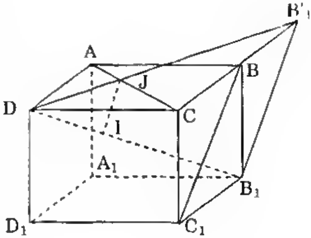
Từ đó ta suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều ABCDEF như sau:

Vẽ hình bình hành O′A′B′C′ biểu diễn cho hình bình hành OABC

Lấy các điểm D′, E′, F′ lần lượt đối xứng của A′, B′, C′ qua tâm O′, ta được hình biểu diễn A′B′C′D′E′F′ của hình lục giác đều ABCDEF.



Bài 47. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC sao cho $IJ \parallel BC_1$. Tính tỉ số $\dfrac{ID}{IB_1}$.



Thực hiện phép chiếu song song lên mặt phẳng (ABCD) theo phương BC_1.

Gọi B'_1 là hình chiếu của B_1.

Khi đó J là giao điểm của DB'_1 và AC.

Trong mặt phẳng $(B_1B'_1D)$ kẻ JI song song với B'_1B_1 ($I \in B_1D$).

Khi đó do $IJ \,//\, B'_1B_1$ suy ra $IJ \,//\, BC_1$

Ta có $\dfrac{DI}{IB_1} = \dfrac{DJ}{JB'_1}$ mà $\dfrac{DJ}{JB'_1} = \dfrac{AD}{CB'_1} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\dfrac{DI}{IB_1} = \dfrac{1}{2}$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song có thể chéo nhau;

(B) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song có thể cắt nhau;

(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song có thể trùng nhau;

(D) Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song không thể song song.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Một đường thẳng luôn song song với hình chiếu song song của nó;

(B) Một đường thẳng có thể cắt hình chiếu song song của nó;

(C) Một đường thẳng không thể trùng với hình chiếu song song của nó;

(D) Một đường thẳng có thể có hình chiếu song song là một đoạn thẳng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường tròn;

(B) Hình chiếu song song của một đường tròn là một elíp;

(C) Hình chiếu song song của một đường tròn là một đoạn thẳng;

(D) Hình chiếu song song của một đường tròn hoặc là một đường tròn hoặc một elíp hoặc một đoạn thẳng.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Hình chiếu song song của một tam giác là một tam giác;

(B) Hình chiếu song song của một tam giác có thể là một điểm;

(C) Hình chiếu song song của một tam giác có thể là một đoạn thẳng;

(D) Hình chiếu song song của một tam giác có thể là một đường thẳng.

Câu 5. Một hình bình hành ABCD không thể xem là hình biểu diễn của các loại hình nào sau đây?

(A) Hình vuông; (B) Hình chữ nhật;

(C) Hình thang; (D) Hình bình hành bất kỳ.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(B)	(D)	(C)	(C)

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

I. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

Câu 1. Hãy nêu sự khác biệt giữa hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song.

Trả lời

Sự khác biệt giữa hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song là: Hai đường thẳng chéo nhau không đồng phẳng còn hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.

Câu 2. Nêu phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Trả lời

Có nhiều phương pháp để chứng minh ba điểm thẳng hàng, nhưng có một phương pháp gắn liền với chương này đó là: Ta chứng tỏ rằng ba điểm đó là những điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.

Câu 3. Nêu phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Trả lời

Có hai phương pháp để chứng minh ba đường thẳng đồng quy:

- Phương pháp 1: Ta chứng minh ba đường thẳng đã cho không đồng phẳng và đôi một cắt nhau.

- Phương pháp 2: Ta chứng minh hai đường thẳng tùy ý, trong ba đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm mà cách xác định điểm đó là duy nhất.

- Chú ý: Để chứng minh n đường thẳng ($n > 3$) đồng quy, ta cũng có thể sử dụng hai phương pháp như trên.

Câu 4. Nêu phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

Trả lời

Có hai phương pháp để chứng minh một đường thẳng d song song với một mặt phẳng (P)

- Phương pháp 1: Ta chứng minh đường thẳng $d \notin (P)$ và $d \parallel a$, với $a \in (P)$.

- Phương pháp 2: Chứng minh cho d nằm trong (α) và (α) song song với (P).

Chú ý: Ta có thể sử dụng khái niệm tính chất vuông góc để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

Câu 5. Nêu phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song.

Trả lời

Có hai phương pháp để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song.

- Phương pháp 1: Chứng minh mp (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với một mp (Q). Hoặc (Q) chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với (P). Hoặc (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau theo thứ tự song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mp (Q).

- Phương pháp 2: Chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng song song với một mặt phẳng thứ ba.

Chú ý: Ta có thể sử dụng khái niệm tính chất vuông góc để chứng minh hai mặt phẳng song song.

II. BÀI TẬP

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung;

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau;

c) Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng;

d) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

Trả lời

* Mệnh đề a) đúng.

* Mệnh đề b) sai (chúng có thể song song)

* Mệnh đề c) đúng.

* Mệnh đề d) sai (chúng có thể cắt nhau; trùng nhau)

Bài 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau;

c) Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau;

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau;

e) Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại;

f) Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại;

g) Một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

Trả lời

* Mệnh đề a) sai (chúng có thể chéo nhau)

* Mệnh đề b) sai (chúng có thể cắt nhau)

* Mệnh đề c) đúng.

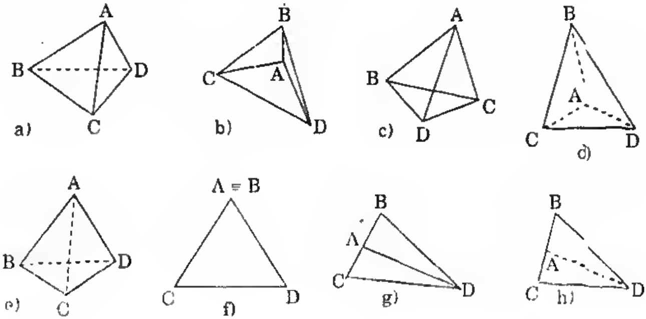
* Mệnh đề d) đúng.

* Mệnh đề e) sai (chúng có thể chéo nhau)

* Mệnh đề f) đúng.

* Mệnh đề g) đúng.

Bài 3. Trong các hình sau đây, hình nào là hình biểu diễn của một tứ diện?



Trả lời

Các hình a, b, d, f, g, h là hình biểu diễn của một tứ diện

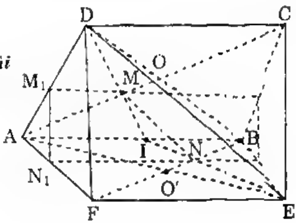
Bài 4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho MC = 2AM, NF = 2BN. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng:

a) MN // DE;

b) M_1N_1 // mp(DEF);

c) mp (MNN_1M_1) // mp (DEF).

Giải



a) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Theo bài ra ta có:

$MC = 2AM \Leftrightarrow MO + OC = 2MA$

$\Leftrightarrow \quad MO + OA = 2MA$

$\Leftrightarrow \quad MO + MA + MO = 2MA$

$\Leftrightarrow \quad MA = 2MO$ mà O lại là trung điểm của DB suy ra M là trọng tâm của ΔADB suy ra DM phải đi qua trung điểm I của AB, tương tự EN cũng đi qua trung điểm I của AB.

Mặt khác ta có $\frac{MC}{MA} = \frac{MD}{MI} = 2$ và $\frac{NE}{NI} = \frac{NF}{NB} = 2$.

Vậy ta có: $\frac{MD}{MI} = \frac{NE}{NI}$ suy ra MN // DE.

b) Ta có. $\frac{M_1D}{M_1A} = \frac{MD}{MI} = 2$, $\frac{N_1F}{N_1A} = \frac{NE}{NI} = 2$

Vậy $\frac{M_1D}{M_1A} = \frac{N_1F}{N_1A}$ suy ra M_1N_1 // DF $\Rightarrow$ M_1N_1 // mp (DEF)

c) Do hai mặt phẳng (MNN_1M_1) chứa hai đường thẳng M_1N_1 và MN cắt nhau và lần lượt song song với hai đường thẳng DF và DE nằm trong mp (DEF). Vậy hai mặt phẳng (MNN_1M_1) và (DEF) song song.

Bài 5. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và $\Delta A'B'C'$. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng:

a) GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ;

b) G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$;

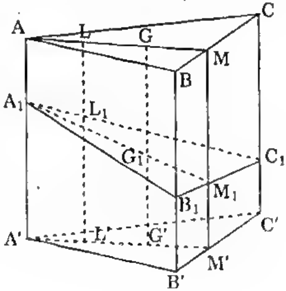
c) $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$; $\quad G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$

Hướng dẫn giải

a) Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và B'C', khi đó G và G' lần lượt nằm trên AM, AM'

Ta có GG' song song và bằng MM' mà MM' lại song song và bằng BB', CC', AA. Do đó ta có (đpcm).

b) Xét phép chiếu song song theo phương AA_1 lên mặt phẳng ($A_1B_1C_1$) thì ta có G_1 là hình chiếu của G và do $G \in AM$ nên $G_1 \in AM_1$ (A_1M_1 là hình chiếu của AM). Mặt khác theo tính chất của phép chiếu song song ta có: $\frac{GA}{GM} = \frac{G_1A_1}{G_1M_1} = 2$. Vậy G_1 là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$.



c) Gọi L, L' lần lượt là trung điểm của AG và A'G' và L_1 là giao điểm của LL' và A_1G_1. Khi đó ta có G_1G', LL' và M_1M' lần lượt là đường trung bình của các hình thang $M_1M'L'L_1$, $G'G_1A_1A'$ và $B'B_1C_1C'$ và từ đó ta có:

$$G'G_1 = \frac{1}{2}(L_1L' + M'M_1) \qquad (1)$$

$$L'L_1 = \frac{1}{2}(G'G_1 + A'A_1) \qquad (2)$$

$$M'M_1 = \frac{1}{2}(B'B_1 + C'C_1) \qquad (3)$$

Thế (3), (2) vào (1) ta có:

$$G'G_1 = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(G'G_1 + A'A_1) + \frac{1}{2}(B'B_1 + C'C_1)]$$

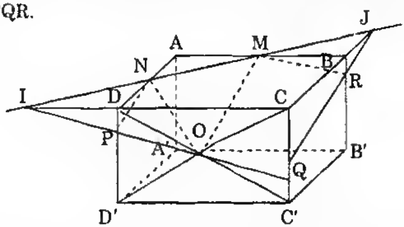
$$\frac{3}{4}G'G_1 = \frac{1}{4}(A'A_1 + B'B_1 + C'C_1) \Leftrightarrow G'G_1 = \frac{1}{3}(A'A_1 + B'B_1 + C'C_1)$$

Tương tự ta chứng minh được: $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Bài 6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt CDD'C'.

Giải

Kéo dài MN cắt CD và CB lần lượt tại I, J. Khi đó ta có I là điểm chung của hai mặt phẳng (MNO) và (CDC'D'), mặt khác O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng đó. Kéo dài IO cắt DD' và CC' lần lượt tại P, Q, nối QJ cắt BB' tại R. Khi đó thiết diện cần tìm là ngũ giác MNPQR.

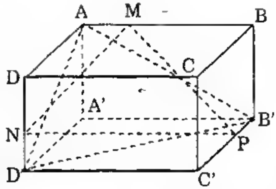


Bài 7. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên ba cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy ba biểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho: $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh rằng mp(MNP) và mp(AB'D') song song với nhau.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Giải

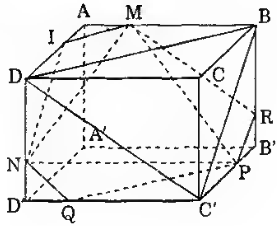


a) Theo giả thiết ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$$ suy ra

MN, NP, PM song song với mặt phẳng cố định (AD'B')

b) Theo tính chất hình hộp ta có mp(AD'B') // mp(BDC') mặt khác theo a) ta có mp(MNP) // mp(AD'B'), từ đó suy ra mp(MNP) // mp(BDC') (tính chất bắc cầu).



Do mp(MNP) // mp(BDC') nên mp(MNP) cắt (ABCD) theo giao tuyến qua M và song song với BD, giao tuyến này cắt AD tại I, nối IN, mp(MNP) cắt (DCC'D') theo giao tuyến qua N và song song với DC', giao tuyến này cắt C'D' tại Q, nối QP. mp(MNP) cắt (BB'C'C) theo giao tuyến qua P và song song với C'B, giao tuyến này cắt BB' tại R, sau đó nối RM.

Như vậy thiết diện cần dựng là lục giác MINQPR.

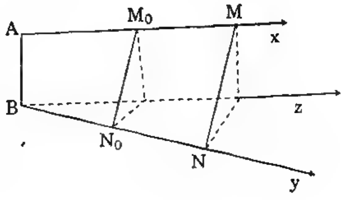
Bài 8. Cho hai tia Ax, By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước)

a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

Giải

a) Gọi M_0, N_0 lần lượt là hai điểm cố định thuộc các tia Ax và By sao cho $\frac{AM_0}{BN_0} = k$. Khi đó ta chứng minh được MN song song với một mặt phẳng cố định chứa M_0N_0, mặt phẳng này song song với AB.



b) Gọi O là điểm thuộc đoạn AB sao cho $\frac{OA}{OB} = k$; Ox', Oy' lần lượt là các tia song song với Ax và By. Từ đó suy ra tập hợp các điểm I là tia phân giác Ot của góc x'Oy.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

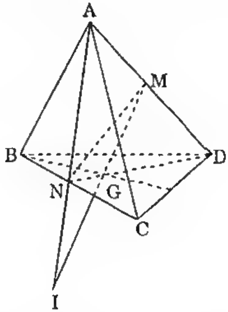
Câu 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC; G là trọng tâm tam giác BCD. Khi ấy giao điểm của đường thẳng MG và mp(ABC) là:

(A) Điểm C;

(B) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN;

(C) Điểm N;

(D) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.



Giải

Chọn mp(AND) chứa MG và giao tuyến của mp(AND) với mp(ABC) là AN. Vậy giao điểm I của AN và MG chính là giao điểm của MG và mp(ABC). Suy ra đáp án đúng là B.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD và ba điểm E, F, G lần lượt nằm trên ba cạnh AB, AC, AD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(EFG) là:

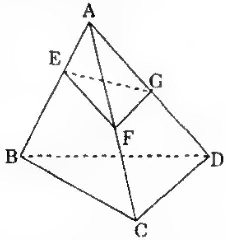
(A) Một đoạn thẳng; (B) Một tam giác;

(C) Một tứ giác; (D) Một ngũ giác.

Giải

Trong mọi trường hợp mp(EFG) luôn luôn không cắt đáy (ABC). Như vậy thiết diện của hình chóp và mp(EFG) là ΔEFG.

Suy ra (B) là đáp án đúng.

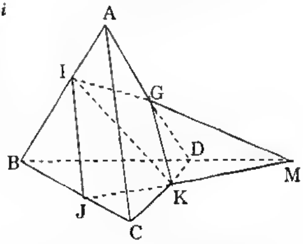


Câu 3. Cho tứ diện ABCD và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(IJK) là:

(A) Một tam giác; (B) Một tứ giác;

(C) Một hình thang; (D) Một ngũ giác.

Giải



Trong mọi trường hợp mp(IJK) luôn luôn cắt cạnh AD (hình bên là trường hợp JK không song song với BD).

Như vậy thiết diện của mp(IJK) và tứ diện là một tứ giác. Suy ra (B) là đáp án đúng.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi $AC \cap BD = I$, $AB \cap CD = J$, $AD \cap BC = K$.

Đẳng thức nào sai trong các đẳng thức sau đây?

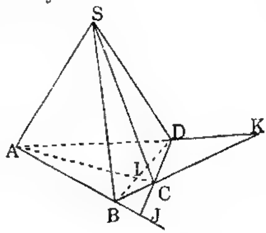
(A) $(SAC) \cap (SBD) = SI$;

(B) $(SAB) \cap (SCD) = SJ$;

(C) $(SAD) \cap (SBC) = SK$;

(D) $(SAC) \cap (SAD) = AB$.

Giải



Đẳng thức $(SAC) \cap (SAD) = AB$ là sai vì $(SAC) \cap (SAD) = SA$, các đẳng thức còn lại đều đúng. Suy ra đáp án sai là (D).

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD. Một mặt phẳng không đi qua đỉnh nào của hình chóp cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

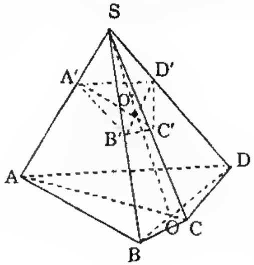
(A) Các đường thẳng A'C', B'D', SO đôi một chéo nhau;

(B) Các đường thẳng A'C', B'D', SO đồng phẳng;

(C) Các đường thẳng A'C', B'D', SO đồng quy;

(D) Hai đường thẳng A'C' và B'D' cắt nhau, còn hai đường thẳng A'C' và SO chéo nhau.

Giải



Gọi $O' = A'C' \cap B'D'$ thì ta có SO cũng đi qua O'. Điều này có nghĩa là ba đường thẳng A'C', B'D', SO đồng quy, suy ra (C) là đáp án đúng.

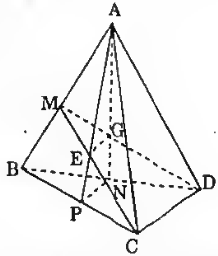
Câu 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và tam giác ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Đường thẳng GE song song với đường thẳng CD;

(B) Đường thẳng GE cắt đường thẳng CD;

(C) Hai đường thẳng GE và CD chéo nhau;

(D) Đường thẳng GE cắt đường thẳng AD.



Giải

Xét ΔMCD, ta có:

$$\frac{ME}{EC} = \frac{MG}{GD} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ EG // CD.

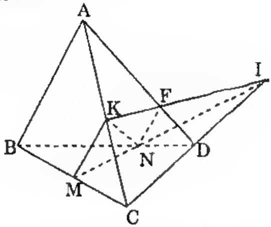
Vậy suy ra mệnh đề (A) đúng.

Câu 7. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và AC, N là điểm trên BD sao cho BN = 2ND. Gọi F là giao điểm của AD và mp(MNK). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) AF = FD; (B) AF = 2FD;

(C) AF = 3FD; (D) FD = 2AF.

Giải



Kéo dài MN và CD cắt nhau tại I.

Nối KI cắt AD tại F, khi đó ta có:

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BN}{ND}$$

$\Rightarrow$ AF = 2FD

$\Rightarrow$ đáp án đúng là (B)

Câu 8. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, cắt tứ diện bởi mp(GCD) thì diện tích của thiết diện là:

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; (C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$; (D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Giải

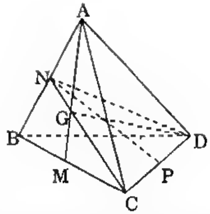
Mặt phẳng (GCD) cắt hình chóp theo thiết diện là ΔNCD (N là trung điểm AB)

Gọi P là trung điểm của CD thì ta có NP ⊥ CD.

Mặt khác theo định lý Pi-ta-go ta có:

$$NP^2 = NC^2 - CP^2 = BC^2 - BN^2 - CP^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$



$\Rightarrow$ $NP = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

dt $(\Delta NCD) = \frac{1}{2}NP.CD = \frac{1}{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

Vậy (B) là đáp án đúng.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi ấy, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với:

(A) Dường thẳng AD;

(B) Đường thẳng BJ;

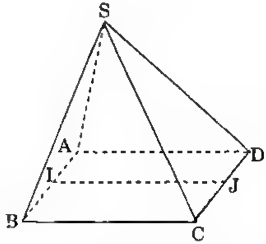
(C) Dường thẳng BI;

(D) Dường thẳng IJ.

Giải

Do hai mp(SAB) và mp(SCD) có một điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB, CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng đi qua S và song song với BA (hay BI).

Như vậy (C) là đáp án đúng.



Câu 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) A'B' // mp(SAD);

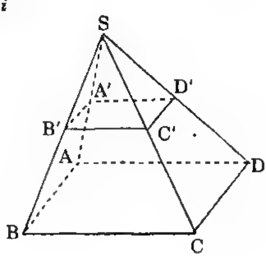
(B) A'C' // mp(SBD);

(C) mp(A'C'D') // mp(ABC);

(D) A'C' // BD.

Giải

Dễ thấy A'D' // AD, D'C' // DC. Như vậy mp(A'C'D') // mp(ABC) suy ra (C) là đáp án đúng.

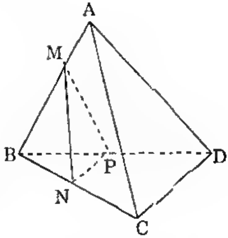


Câu 11. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho AM = m (0 < m < a). Khi đó, diện tích thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua M song song với mp(ACD) là:

(A) $\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{(a-m)^2\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\frac{(a+m)^2\sqrt{3}}{4}$; (D) $\frac{(a-m)^2\sqrt{3}}{4}$.

Giải



Ta có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(ACD) là tam giác đều MNP. Mặt khác ta có:

$\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Leftrightarrow MN = BM$

$\Leftrightarrow MN = a - m$

Vậy đt(ΔMNP) = $\frac{1}{2}(a-m)^2\sin 60^\circ = \frac{(a-m)^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow$ đáp án đúng là (D).

Câu 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) song song với AC và SB lần lượt cắt các cạnh SA, AB, BC, SC, SD, BD tại M, N, E, F, I, J. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

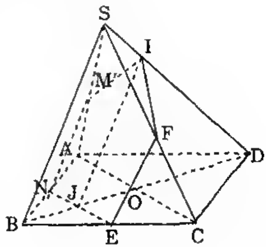
(A) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đôi một song song;

(B) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng quy;

(C) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng phẳng;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Giải



Dễ thấy bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đôi một song song. Suy ra (A) là đáp án đúng (Các phương án còn lại đều sai).

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	(B)	(B)	(B)	(D)	(C)	(A)	(B)	(B)	(C)	(C)	(D)	(A)

CHƯƠNG III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vectơ trong không gian

Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như vectơ và các phép toán vectơ trong mặt phẳng; chúng cũng có các tính chất như vectơ trong mặt phẳng (hình học 10)

2. Sự đồng phẳng của các vectơ, điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

- Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ được gọi là đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n sao cho:

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}.$$

Ngoài ra các số m, n là duy nhất.

- Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D đồng phẳng (nằm trên một mặt phẳng) là có các số m, n sao cho:

$$\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$$

Ngoài ra các số m, n là duy nhất.

- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{d}$ bất kỳ, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho:

$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, ngoài ra các số m, n, p là duy nhất.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra?

a) Có một vectơ trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$;

b) Có hai vectơ trong ba vectơ đó cùng phương.

Trả lời

a) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$, chẳng hạn $\vec{a} = \vec{0}$, thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng:

$1.\vec{a} + 0.\vec{b} + 0.\vec{c} = \vec{0}$

b) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có hai vectơ cùng phương chẳng hạn $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng phương thì $\vec{b} = k.\vec{c}$ (ta xét với $\vec{c} \neq \vec{0}$ vì nếu $\vec{c} = \vec{0}$ thì theo câu a) ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng).

Khi đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ đồng phẳng vì đẳng thức sau luôn đúng:

$$\vec{0}.\vec{a} + 1.\vec{b} - k\vec{c} = \vec{0}$$

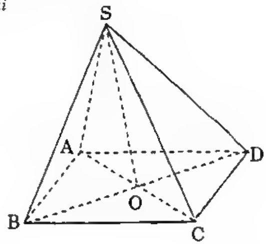
Lưu ý: Ta có thể trả lời bằng cách dựng các điểm và chứng minh các điểm đồng phẳng, từ đó suy ra kết quả câu trả lời.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD

a) Chứng minh rằng nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Diều ngược lại có đúng không?

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

Giải



a) Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Vậy với hình chóp S.ABCD thì ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \qquad (1)$

Lại có do O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD; nên $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OB}$.

Do đó (1) $\quad \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (1 + k)\overrightarrow{OA} + (1 + m)\overrightarrow{OB} = \vec{0} \qquad (2)$

Mặt khác $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ lại là hai vectơ không cùng phương nên từ (2), ta suy ra $\begin{cases} 1 + k = 0 \\ 1 + m = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} k = -1 \\ m = -1 \end{cases}$

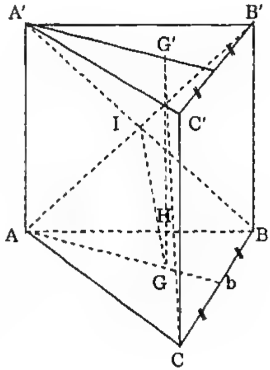
$\Rightarrow$ O là trung điểm của AC và BD, tức ABCD là hình bình hành.

Vậy với hình chóp SABCD và O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C', I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và A'B. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

Giải



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

Khi đó $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{6}$ (a)

Lại có do G' là trọng tâm tam giác A'B'C', nên:

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'})$$

mà $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{c}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AG'} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

Mặt khác

$$\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c} = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}}{3} \quad \text{(b)}$$

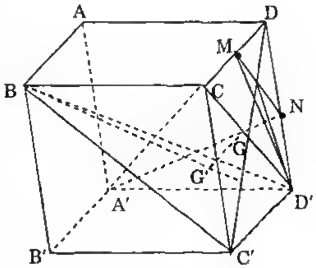
Từ (a), (b) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{CG'} = 2.\overrightarrow{GI}$

Mà điểm G không thuộc đường thẳng CG'

Vậy GI và CG' là hai đường thẳng song song.

Bài 4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD'; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A'D'MN và BCC'D'. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

Giải



Dặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

Ta có do G là trọng tâm của tứ diện A'D'MN nên:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

và G' là trọng tâm của tứ diện BCC'D' nên:

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'})$$

Do vậy $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{4}[(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD'}) + (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AN}]$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'})$$

mà $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} = -\vec{c} + \vec{a}$

$\overrightarrow{D'C} = \overrightarrow{A'B} = -\vec{c} + \vec{a}$

$\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{ND'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{c}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{4}(-\vec{c} + \vec{a} - \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{c})$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}) = \frac{5}{8}\vec{a} - \frac{1}{8}\vec{c}$$

Vậy $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{8}(5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}) \Rightarrow \overrightarrow{GG'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}$ đồng phẳng.

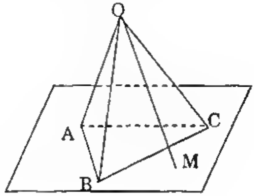
Mặt khác, G là trọng tâm tứ diện A'D'MN, nên G không thuộc mặt phẳng (ABB'A'), nên đường thẳng GG' và mặt phẳng (ABB'A') song song với nhau.

Bài 5. Trong không gian, cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) thì có số ba x, y, z mà x + y + z = 1 sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm 0.

b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

Giải



a) Do $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương, nên điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) khi và chỉ khi có: $\overrightarrow{AM} = \ell\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$

Hay $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \ell(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$ với mọi O.

Tức là: $\overrightarrow{OM} = (1 - \ell - m)\overrightarrow{OA} + \ell\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC}$

Đặt $1 - \ell - m = x$; $\ell = y$, $m = z$ thì:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \text{ với } x + y + z = 1$$

b) Ngược lại: Từ $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với $x + y + z = 1$, ta có:

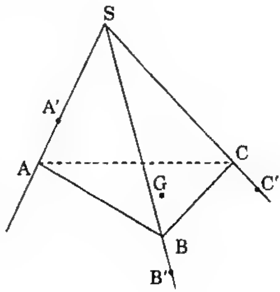
$$\overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

Hay $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$ tức là $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$

Mà $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên M thuộc mặt phẳng (ABC).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho SA = a.SA', SB = b.SB', SC = c.SC', trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'B'C') đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

Giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{y}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{z}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$$

hay $3\overrightarrow{SG} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

mà theo giả thiết SA = a.SA', SB = b.SB', SC = c.SC' và A', B', C' nằm lần lượt trên 3 tia SA, SB, SC.

$\Rightarrow \overrightarrow{SA} = a.\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}$,

$\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$

Do đó $3\overrightarrow{SG} = a.\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$

Theo bài 5, suy ra (A'B'C') đi qua G

$\Leftrightarrow$ A', B', C', G đồng phẳng

$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 3$ (đpcm).

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác. Đặt $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ với M là điểm bất kỳ. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) $P = GA^2 + GB^2 + GC^2$; (B) $P = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$;

(C) $P = MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$; (D) $P = MG^2 + \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$;

(B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0$;

(C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$;

(D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = 0$.

Câu 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trong các cặp ba vectơ sau, cặp ba vectơ nào đồng phẳng?

(A) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BB'}$; (B) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{B'B}$;

(C) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{B'C'}$; (D) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'D'}, \overrightarrow{CC'}$.

Câu 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là các điểm chia AB, BC,CD, DA theo tỉ số k. M là điểm tùy ý. Bốn điểm A', B', C', D' đồng phẳng khi giá trị của k là:

(A) –1; (B) 0; (C) –2; (D) 2.

Câu 5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'. Đặt $M = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'}$. Khi đó:

(A) $M = \overrightarrow{AB}$; (B) $M = \overrightarrow{AA'}$;

(C) $M = \overrightarrow{AD}$; (D) $M = \vec{0}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(B)	(C)	(C)	(A)	(D)

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2.

Lưu ý: Nếu $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 và $(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng α hoặc $180^\circ - \alpha$ tùy theo $\alpha < 90^\circ$ hoặc $\alpha > 90^\circ$.

2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

- Hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ký hiệu $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.
  Như vậy $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$ ($\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của a và b).
- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

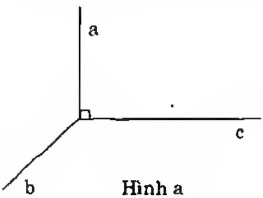
Bài 7. Mỗi khẳng định sau có đúng không?

a) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

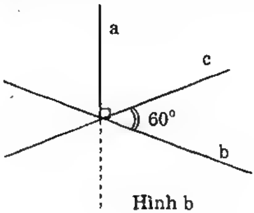
b) Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Trả lời

a) Khẳng định "Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau" là không đúng. (xem hình a).



Hình a



Hình b

b) Khẳng định "Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau" là không đúng (xem hình b).

Bài 8. a) Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba vectơ $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b) Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Giải

a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{n}$

Do hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương $\Rightarrow$ O, A, B không thẳng hàng.
$\Rightarrow$ O, A, B xác định một mặt phẳng.

Giả sử $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ đồng phẳng $\Rightarrow$ O, A, B, C cùng thuộc một mặt phẳng

mà $\begin{cases} OA \perp OC \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

Vậy $\vec{n}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b) Giả sử $\vec{n} \perp \vec{a}$, $\vec{n} \perp \vec{b}$, $\vec{n} \perp \vec{c}$

• Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng

• Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ là ba vectơ không đồng phẳng (suy ra từ a). Khi đó:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{c}.\vec{n} = x.\vec{a}.\vec{n} + y.\vec{b}.\vec{n} + z.\vec{n}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = z.\vec{n}^2 \quad (\text{vì } \vec{c}.\vec{n} = 0,\ \vec{a}.\vec{n} = 0,\ \vec{b}.\vec{n} = 0)$$

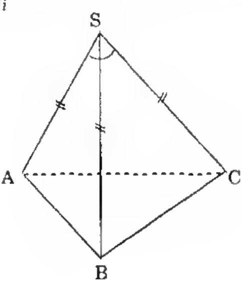
Mà $\quad \vec{n} \neq \vec{0} \Rightarrow z = 0$

Vậy $\quad \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ hay $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Nếu ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng vuông góc với một đường thẳng d thì do kết quả trên nên ta có ba vectơ chỉ phương của ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng phẳng, tức là ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng song song với một mặt phẳng.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng SA ⊥ BC, SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

Giải



Ta có:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$$

$$= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$= |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SC}|.\cos\widehat{ASC}$$

$$- |\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{SB}|.\widehat{ASB}$$

mà SA = SB = SC,

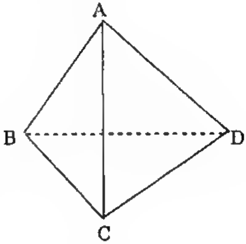
$\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0$ hay SA ⊥ SB.

Hoàn toàn tương tự ta có: SB ⊥ AC, SC ⊥ AB.

Bài 10. Cho hình tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ thì AB ⊥ CD, AC ⊥ BD, AD ⊥ BC. Điều ngược lại có đúng không?

Giải



Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow$ AC ⊥ BD

Hoàn toàn tương tự, ta có được:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ AB ⊥ CD

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ AD ⊥ BC

Như vậy điều ngược lại cũng đúng.

Bài 11. Cho hình tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

a) AB ⊥ CD

b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì IJ ⊥ AB và IJ ⊥ CD.

Giải

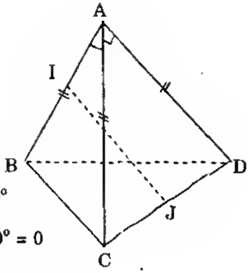
a) Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AD}|.\cos\widehat{BAD}$

$- |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos\widehat{BAC}$



mà AB = AC = AD và $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.AD.\cos60^\circ - AB.AD.\cos60^\circ = 0$

Vậy $AB \perp CD$.

b) Vì I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos60^\circ + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{AB}|.\cos60^\circ - \overrightarrow{AB}^2.$$

$$= \frac{1}{2}a.a.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a.a.\frac{1}{2} - a^2 = 0. \text{ (Trong đó AB = AC = AD = a)}$$

Vậy $AB \perp IJ$

Mặt khác $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0$$

Vậy $CD \perp IJ$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp SABC có AB = a (cm); BC = $a\sqrt{3}$ (cm); CA = 2a (cm). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và SC. Góc giữa IJ và AC là:

(A) 30°; (B) 45°; (C) 60°; (D) 90°.

Câu 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. AB = CD = 2a, MN = $a\sqrt{3}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AB và CD là:

(A) 30°; (B) 45°; (C) 60°; (D) 90°.

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình chữ nhật AB = 4cm; AD = 3cm, SD = SC = 4cm. Góc giữa SC và AB là:

(A) 90°; (B) 60°; (C) 45°; (D) 30°.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành và AD = 2AB, tam giác ASB vuông tại A. M là điểm di động trên cạnh AD (M ≠ A và M ≠ D). Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với SA và CD. Gọi hình H là thiết diện tạo bởi hình chóp SABCD với mặt phẳng (α). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) H là hình bình hành; (B) H là hình chữ nhật;

(C) H là hình thang cân; (D) H là hình thang vuông.

Câu 5. Cho hình chóp SABC. M là trung điểm AB. (P) là mặt phẳng qua M và song song với SB và AC. Biết SB ⊥ AC, SB = 12cm, AC = 8cm. Gọi S_O là diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) với hình chóp SABC. Khi đó S_O là:

(A) $72cm^2$; (B) $24cm^2$; (C) $48cm^2$; (D) $32cm^2$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(B)

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Một đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

   Khi đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ký hiệu a ⊥ (P) hoặc (P) ⊥ a

2. **Định lý:**

   Nếu đường thẳng đ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

3. **Tính chất**

- Qua một điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với một đường thẳng a cho trước.

- Qua một điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng Δ vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

- Nếu $\left.\begin{array}{l} a \,//\, b \\ mp(P) \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow mp(P) \perp b;$

- Nếu $\left.\begin{array}{l} a \perp mp(P) \\ b \perp mp(P) \\ a \neq b \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b;$

- Nếu $\left.\begin{array}{l} mp(P) \,//\, mp(Q) \\ a \perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp mp(Q);$

- Nếu $\left.\begin{array}{l} mp(P) \perp a \\ mp(Q) \perp a \\ mp(P) \neq mp\,(Q) \end{array}\right\} \Rightarrow mp(P) \,//\, mp(Q);$

- Nếu $\left.\begin{array}{l} a \,//\, mp(P) \\ b \perp mp(P) \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a;$

- Nếu $\left.\begin{array}{l} a \not\subset mp(P) \\ a \perp b \\ mp(P) \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, mp(P);$

4. Định lý ba đường vuông góc

- **Định nghĩa:** Phép chiếu lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)
- Định lý ba đường vuông góc: Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^o.
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).
- Gọi α là góc giữa đường thẳng a và mp (P) thì $0^o \le \alpha \le 90^o$.

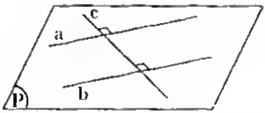
I. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 12. Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mặt phẳng (P)" có đúng không? Vì sao?

Trả lời

Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mặt phẳng (P)" không đúng.

Ví dụ: Hai đường thẳng a, b cho trước trong mặt phẳng (P), a // b, còn đường thẳng c nằm trong (P) sao cho c ⊥ a, c ⊥ b.



Bài 13. Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu a // (P) và b ⊥ (P) thì b ⊥ a;

b) Nếu a // (P) và b ⊥ a thì b ⊥ (P);

c) Nếu a // (P) và b // a thì b // (P);

Trả lời

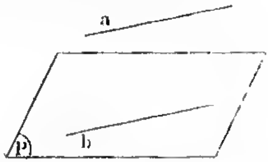
a) Mệnh đề "Nếu a // (P) và b ⊥ (P) thì b ⊥ a" là mệnh đề đúng vì:

Do a // (P) $\Rightarrow$ a // a' mà a' ⊂ (P), lại có b ⊥ (P) $\Rightarrow$ b ⊥ a' $\Rightarrow$ b ⊥ a.

b) Mệnh đề "Nếu a // (P) và b ⊥ a thì b ⊥ (P)" là mệnh đề sai vì:

Dựa vào điều kiện đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

c) Mệnh đề "Nếu a // (P) và b // a thì b // (P)" là mệnh đề không đúng. Ví dụ khi b ⊂ (P) (hình bên).



Bài 14. Cho điểm S có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là H. Với điểm M bất kỳ trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau,

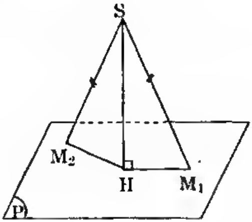
b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

Giải

a) Giả sử H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (P)

$M_1, M_2 \in (P)$ và $HM_1 = HM_2$

Do SH ⊥ (P) $\Rightarrow \begin{cases} SH \perp HM_1 \\ SH \perp HM_2 \end{cases}$



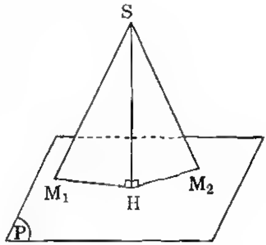
⇒ hai tam giác vuông SHM_1 và SHM_2 bằng nhau (c - g - c)

⇒ $SM_2 = SM_1$

Ngược lại giả sử M_1, M_2 thuộc mp(P) sao cho $SM_1 = SM_2$

Do $SH \perp (P) \Rightarrow SH \perp HM_1$, $SH \perp HM_2$

$\Rightarrow \quad \Delta SHM_1 = \Delta SHM_2 \Rightarrow HM_1 = HM_2$



b) Giả sử $M_1, M_2 \in (P)$ và $SM_1 > SM_2$ (1)

Xét hai tam giác vuông HSM_1 và HSM_2

Ta có: $SH^2 = SM_1^2 - HM_1^2$

$SH^2 = SM_2^2 - HM_2^2$

$\Rightarrow \quad SM_1^2 - HM_1^2 = SM_2^2 - HM_2^2$

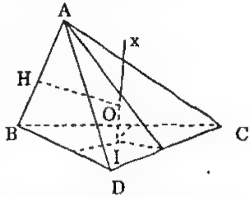
$\Leftrightarrow \quad SM_1^2 - SM_2^2 = HM_1^2 - HM_2^2$ (2)

Từ (1), (2) ⇒ $HM_1^2 - HM_2^2 > 0$ hay $HM_1 > HM_2$

Ngược lại, giả sử $HM_1 > HM_2$, bằng cách chứng minh tương tự ta có $SM_1 > SM_2$ (đpcm).

Bài 15. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

Giải



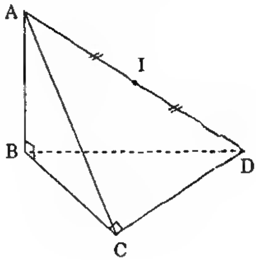
Từ tâm I của đường tròn ngoại tiếp Δ BCD dựng Ix ⊥ mp(BCD). Qua trung điểm H của AB dựng mp(α) ⊥ AB. Gọi O là giao điểm của Ix và mp(α) thì O là điểm cần tìm. Thật vậy, do IB = IC = ID

⇒ OB = OC = OD; OA = OB. Vậy O cách đều A, B, C, D

Bài 16. Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và AB = a, BC = b, CD = c.

a) Tính độ dài AD

b) Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D



Giải

a) Do $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(BCD)$.

Mặt khác BC ⊥ CD nên AC ⊥ CD (định lý ba đường vuông góc)

Vậy $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$= AB^2 + BC^2 + CD^2$

$\Rightarrow \quad AD = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b) Vì $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

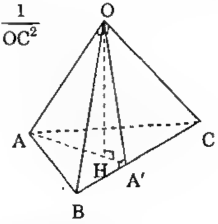
Do vậy điểm cách đều bốn điểm A, B, C, D là trung điểm I của AD.

Bài 17. Cho hình tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc

a) Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn

b) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$



Giải

a) Do OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, nên

$AB^2 = OA^2 + OB^2;$

$BC^2 = OB^2 + OC^2;$

$CA^2 = OC^2 + OA^2.$

Suy ra: $AB^2 + CA^2 = 2OA^2 + OB^2 + OC^2 > OB^2 + OC^2 = BC^2$

$\Rightarrow \quad BC^2 < AB^2 + CA^2$

mà $BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB.CA.\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} > 0$

$\Rightarrow \quad \widehat{BAC}$ là góc nhọn.

Hoàn toàn chứng minh tương tự, ta có $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ là góc nhọn

Vậy ΔABC là tam giác nhọn.

b) Do H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \quad OH \perp mp(ABC) \Rightarrow OH \perp BC \qquad (1)$

Lại có $OA \perp mp(OBC) \Rightarrow OA \perp BC \qquad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow BC \perp mp(OHA) \Rightarrow BC \perp AH$

$\Rightarrow \quad AH$ là đường cao của ΔBAC

Hoàn toàn tương tự $BH \perp AC$, $CH \perp AB$ hay H là trực tâm ΔABC.

c) Giả sử $AH \perp BC$ tại A', nên $BC \perp OA'$

Lại có OH là đường cao tam giác AOA' (vuông tại O)

Và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC (vuông tại O) nên:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA'^2}; \quad \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

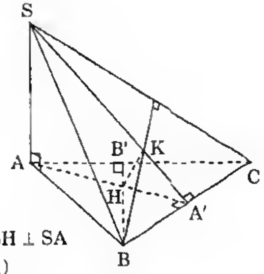
Vậy: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Bài 18. Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ mp(ABC) và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy; b) SC $\perp$ mp(BHK);

c) HK $\perp$ mp(SBC).

Giải



a) Gọi AA' là đường cao tam giác ABC, do SA $\perp$ mp(ABC) nên SA' $\perp$ BC (định lý ba đường vuông góc)

Vì H là trực tâm ΔABC, K là trực tâm tam giác SBC, nên H $\in$ AA' và K $\in$ SA'.

Vậy AH, SK, BC đồng quy tại A'.

b) Vì H là trực tâm tam giác ABC

$\Rightarrow$ BH $\perp$ AC.

Mà SA $\perp$ mp(ABC), BH $\subset$ mp(ABC) $\Rightarrow$ BH $\perp$ SA

Nên BH $\perp$ mp(SAC) $\Rightarrow$ BH $\perp$ SC (1)

Lại có K là trực tâm tam giác SBC $\Rightarrow$ BK $\perp$ SC (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ SC $\perp$ mp(BHK) (đpcm).

c) Từ câu b), SC $\perp$ mp(BHK) $\Rightarrow$ HK $\perp$ SC (3)

Lại có BC $\perp$ mp(SAA') $\Rightarrow$ BC $\perp$ HK (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow$ HK $\perp$ mp(SBC).

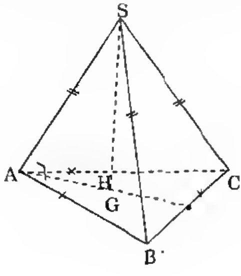
Bài 19. Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng SG $\perp$ (ABC). Tính SG.

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

Khi đó hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp SABC khi cắt bởi mặt phẳng (P).

Giải



a) Kẻ SH $\perp$ mp(ABC), do SA = SB = SC

$\Rightarrow$ HA = HB = HC.

Mặt khác ΔABC là tam giác đều nên H trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Vậy SG $\perp$ mp(ABC)

Ta có $SG^2 = SA^2 - AG^2$

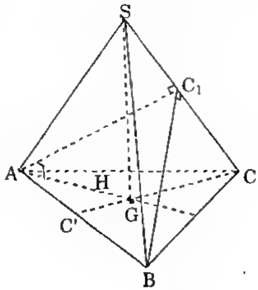
$$= b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$$

Vậy $SG = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$ (với $3b^2 > a^2$)

b) Gọi C' là trung điểm AB $\Rightarrow$ C, C', G thẳng hàng

Do ΔABC đều $\Rightarrow$ $CC' \perp AB$, mặt khác $SG \perp AB$ (vì $SG \perp mp(ABC)$)

$\Rightarrow$ $AB \perp mp(SCC')$ hay $AB \perp SC$



Lại có do (P) đi qua A và vuông góc với SC nên $AB \subset mp(P)$.

Kẻ $AC_1 \perp SC$ của tam giác ASC

$\Rightarrow$ $mp(AC_1B)$ là mặt phẳng (P)

Do tam giác SAC cân tại đỉnh S nên C_1 nằm trên SC

$\Leftrightarrow$ $\widehat{ASC} < 90^0$

Hay $AC^2 < SA^2 + SC^2$ hay $a^2 < 2b^2$

Khi đó thiết diện tạo bởi (P) với hình chóp SABC là tam giác ABC_1.

$$S_{\Delta ABC_1} = \frac{1}{2}AB.C'C_1 = \frac{1}{2}a.C'C_1$$

Lại có hai tam giác vuông SGC và tam giác $C'C_1C$ đồng dạng với nhau

$$\Rightarrow \quad \frac{SG}{SC} = \frac{C'C_1}{C'C} \Rightarrow C'C_1 = \frac{SG.C'C}{SC}$$

Mà $SC = b$, $SG = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$, $C'C = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \quad C'C_1 = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}.$$

Vậy $S_{\Delta ABC_1} = \frac{1}{2}a.C'C_1 = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$

Bài 20. a) Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là **tứ diện trực tâm.**

b) Chứng minh rằng các mệnh đề sau đây là tương đương.

i) ABCD là tứ diện trực tâm;

ii) Chân đường cao hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện;

iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

c) Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là **trực tâm** của tứ diện nói trên.

Giải

a) Với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0$. Thật vậy:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$

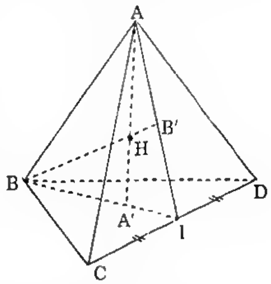
$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0$

Từ kết quả trên suy ra nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ tức là

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ thì $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0$ hay $BC \perp AD$ (đpcm).

b) Ta chứng minh a) ⇔ b)



Ta chứng minh: với tứ diện ABCD, điều kiện $AC \perp BD$, $AB \perp CD$ xảy ra khi và chỉ khi hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD.

Thật vậy: kẻ $AA' \perp (BCD)$ thì A' là hình chiếu của A trên (BCD).

Do $AB \perp CD$ nên $BA' \perp CD$

Tương tự $CA' \perp BD$.

Vậy A' là trực tâm tam giác BCD.

Ngược lại, do A' là trực tâm tam giác BCD nên $BA' \perp CD$, từ đó suy ra $AB \perp CD$

Tương tự $AC \perp BD$. Do vậy, từ ABCD là tứ diện trực tâm và từ kết quả trên, ta suy ra i) và ii) là tương đương.

Ta chứng minh i) ⇔ iii).

Ta có $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow \quad AB^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = AC^2 + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2$

$\Leftrightarrow \; -2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

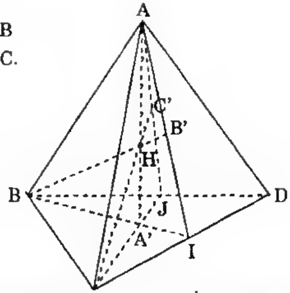
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ hay $AD \perp BC$

Tương tự như trên, ta có:

$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow CD \perp AB$

$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow DB \perp AC.$

Vậy (i) $\Leftrightarrow$ (iii).



c) Vì ABCD là tứ diện trực tâm

Do vậy, nếu kẻ các đường cao AA' và BB' của tứ diện thì theo chứng minh trên A', B' lần lượt là trực tâm của tam giác BCD và tam giác ACD.

Khi đó AB' BA', CD đồng quy tại điểm I.

$\Rightarrow$ AA' và BB' là hai đường cao của tam giác ABI, nên AA' và BB' cắt nhau tại H.

Tương tự, kẻ đường cao CC' của tứ diện thì ta có AA', CC' cắt nhau và BB', CC' cắt nhau.

Mặt khác AA', BB', CC' không đồng phẳng nên AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm.

Lập luận tương tự như trên, ta có AA', BB', DD' đồng quy (với DD' là một đường cao của tứ diện ABCD)

Vậy khi ABCD là tứ diện trực tâm thì các đường cao AA', BB', CC', DD' đồng quy tại điểm H.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC từng cặp vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của Δ ABC. Câu nào sau đây sai?

(A) OA $\perp$ (OBC); (B) AC $\perp$ (OBH);

(C) AB $\perp$ (OBC); (D) OH $\perp$ (ABC.

Câu 2. Cho hình chóp SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Và SA = SB = SC = 1(cm). Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC). Độ dài SH là:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (cm); (B) $\frac{1}{3}$ (cm); (C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (cm); (D) $\sqrt{3}$ (cm).

Câu 3. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh 4a, SA = 3a, SD = 5a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

(A) BD $\perp$ (SAC); (B) AB $\perp$ (SAD);

(C) SA $\perp$ (ABCD); (D) Cả (A), (B) và (C) đều sai.

Câu 4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), SA = $a\sqrt{2}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD). Khi đó α bằng:

(A) 30°; (B) 45°; (C) 60°; (D) 90°.

Câu 5. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = a, SA ⊥ (ABCD). Khi $\widehat{BCD} = 120^\circ$, độ dài cạnh SC là:

(A) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$; (B) $a\sqrt{2}$; (C) $\frac{3a}{2}$; (D) 2a.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(C)	(A)	(Đ)	(B)	(B)

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai mặt phẳng:

Là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Định lý: Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì S' = S.cosφ, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P')

2. Hai mặt phẳng vuông góc:

+ Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

+ Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc:

* ***Định lý:*** Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi một trong chúng chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

* ***Các hệ quả:***

- Nếu $\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q)\\ A \in (P)\\ a \perp (Q)\\ A \in a\end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P)$

- Nếu $\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q)\\ (P) \cap (Q) = c\\ a \subset (P)\\ a \perp c\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q)$

- Nếu $\left.\begin{array}{l}(P) \cap (Q) = a\\ (P) \perp (R)\\ (Q) \perp (R)\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (R)$

- Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P)

3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 21. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau;

b) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau;

c) Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặ, phẳng cho trước;

d) Có duy nh t một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt pha,g cắt nhau cho trước;

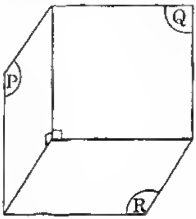
e) Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định;

f) Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng;

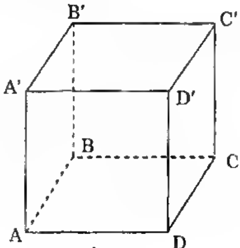
g) Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

Giải

a) Là mệnh đề sai, xem hình (a), hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) nhưng (P) không song song với (Q)



(a)



(b)

b) là mệnh đề sai, xem hình (b), ta có:

Hai mặt phẳng (ABB'A') và (CDD'C') vuông góc với mặt phẳng (ABCD) song (ABB'A') và (CDD'C') không vuông góc với nhau.

c) Mệnh đề "Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước" là mệnh đề sai. Thật vậy: Khi Δ là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước thì qua Δ có vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (P).

d) Mệnh đề "Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước" là mệnh đề đúng.

e) Mệnh đề "Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định" là mệnh đề đúng vì: Giả sử hai mặt phẳng (Q) và (R) bất kỳ đi qua điểm O và vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó (Q) và (R) cắt nhau theo giao tuyến Δ đi qua O và vuông góc với (P).

Do mp(P) và điểm O cho trước nên Δ là đường thẳng cố định.

f) Mệnh đề "Hình làng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng" là mệnh đề sai vì khi hai mặt bên của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song thì lăng trụ đó chưa chắc là lăng trụ đứng.

g) Mệnh đề "Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều" là mệnh đề đúng. Thật vậy: Giả sử hình chóp $SA_1A_2...A_n$ có đáy là đa giác đều và $SA_1 = SA_2 = SA_3$. Gọi H là hình chiếu của S lên $(A_1A_2...A_n)$ $\Rightarrow$ $HA_1 = HA_2 = HA_3$ $\Rightarrow$ H là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$ $\Rightarrow$ mệnh đề đúng.

Bài 22. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c. Nếu:

$$AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

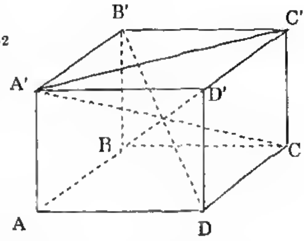
Thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?

Giải

Xét hình bình hành ACC'A' ta có $AC'^2 + CA'^2 = 2(AC^2 + AA'^2)$

Đối với hình bình hành BDD'B' ta có:

$$BD'^2 + DB'^2 = 2(BD^2 + BB'^2)$$



Từ đó suy ra: $AC'^2 + CA'^2 + BD'^2 + DB'^2$

$$= 2(AC^2 + AA'^2 + BD^2 + BB'^2)$$
$$= 2((AC^2 + BD^2) + (AA'^2 + BB'^2))$$
$$= 2(2(AB^2 + AD^2) + 2AA'^2)$$
$$= 4(AB^2 + AD^2 + AA'^2)$$
$$= 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

mà $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Nên suy ra $A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, tức bốn đường chéo của hình hộp bằng nhau.

Lại có do ACCA là hình bình hành và AC' = A'C nên ACC'A' là hình chữ nhật, tức là $AA' \perp AC$.

Tương tự như trên ta có $BB' \perp BD$. Mà BB' // AA', vậy $AA' \perp (ABCD)$

Tương tự, ta có $AB \perp (ADD'A')$, $AD \perp (ABB'A')$.

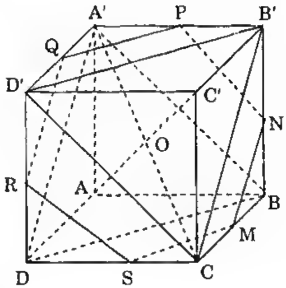
Vậy ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.

Bài 23. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng (A'BD) và (B'CD')

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết điện đó.

Giải



Do ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương, suy ra AB = AA' = AD = a và $CA' = C'B = C'D = a\sqrt{2}$

Suy ra A, C' nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác A'BD

$\Rightarrow$ $AC' \perp (A'BD)$

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $AC' \perp (B'CD')$.

(Hơn nữa trong phần quan hệ song song, ta đã chứng minh được (A'BD) và (B'CD') song song với nhau và chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau).

b) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm CB, BB', B'A', A'D', D'D, DC.

Khi đó ta có M, N, P, Q, R, S đồng phẳng (1)

Lại có, do MN // CB' mà $\begin{cases} CB' \subset (CB'D') \\ AC' \perp (CB'D') \end{cases}$

Nên $AC' \perp MN$ (2)

Hoàn toàn tương tự, $AC' \perp NP$ (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra $AC' \perp (MNPQRS)$ (*)

Gọi O là trung điểm AC' $\Rightarrow$ O là trung điểm MQ suy ra:

$O \in (MNPQRS)$ (**)

Từ (*) và (**), suy ra lục giác MNPQRS là thiết điện cần tìm.

• Ta có do ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương cạnh a, nên dễ nhận thấy

$MN = NP = PQ = QR = RS = SM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Do vậy MNPQRS là lục giác đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi S_0 là điện tích lục giác MNPQRS

Suy ra $S_0 = 6.dt(\Delta MON)$ ($dt(\Delta MON)$ là diện tích tam giác MON) mà tam giác MON là tam giác đều cạnh $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \quad S_0 = 6.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ (đơn vị diện tích)

Vậy diện tích thiết diện là $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Bài 24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và SA $\perp$ (ABCD), SA = x. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60^o.

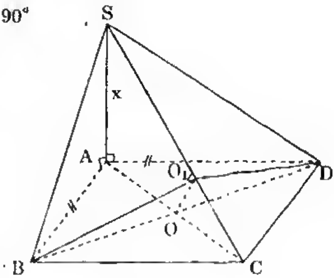
Giải

Gọi O là giao điểm của AC với BD. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $OO_1 \perp SC$. Dễ thấy $(BDO_1) \perp SC$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) là góc giữa hai đường thẳng BO_1 và DO_1.

Lại có $OO_1 \perp BD$, $OO_1 < OC = OB$ nên $\widehat{BO_1O} > 45^o$

Tương tự $\widehat{DO_1O} > 45^o$, tức $\widehat{BO_1D} > 90^o$



Như vậy việc xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60^o tương đương với việc xác định x để $\widehat{BO_1D} = 60^o$.

Mặt khác tam giác BO_1D cân tại O_1 nên yêu cầu trên tương đương với xác định x để $\widehat{BO_1D} = 60^o$ hoặc $BO = OO_1.\tan60^o$. Điều này tương đương với $BO = OO_1.\sqrt{3}$

Ta có: $OO_1 = OC.\sin\widehat{OCO_1} = OC.\sin\widehat{ACS} = OC.\dfrac{SA}{AC}$

Như vậy $BO = OO_1.\sqrt{3} \Leftrightarrow BO = \sqrt{3}.OC.\dfrac{SA}{AC}$

$\Leftrightarrow SC = \sqrt{3}.SA$ (vì OC = BO)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}.x \Leftrightarrow x = a.$

Vậy khi x = a thì hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60^o

Bài 25. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và AB = AC = BD. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi AC = AB = BD = a.

Giải

Gọi I là trung điểm của BC.

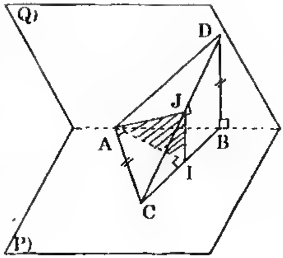
Do AB = AC $\Rightarrow$ AI $\perp$ BC.

Do BD $\perp$ (ABC) nên AI $\perp$ CD (theo định lý ba đường vuông góc)

Trong mặt phẳng (BCD), kẻ IJ $\perp$ CD. (J $\in$ CD) $\Rightarrow$ CD $\perp$ (AIJ)

$\Rightarrow$ (AIJ) là mặt phẳng (α) và thiết diện cần tìm là tam giác AIJ.

Dễ thấy AIJ là tam giác vuông tại I (vì AI $\perp$ (CBD)).



Vậy $S_{\Delta AIJ} = \frac{1}{2}AI.IJ$ ($S_{\Delta AIJ}$ là diện tích tam giác AIJ)

Ta có $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\Delta CJI \sim \Delta CBD$ (hai tam giác vuông có một cặp góc nhọn bằng nhau).

$$\Rightarrow \quad \frac{IJ}{DB} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow IJ = \frac{CI}{CD}.DB = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}}.a = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy $S_{\Delta AIJ} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ (đơn vị diện tích).

Bài 26. Hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp gì nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau?

a) Tứ diện AB'CD' có các cạnh đối bằng nhau;

b) Tứ diện AB'CD' có các cạnh đối vuông góc;

c) Tứ diện AB'CD' là tứ diện đều;

Giải

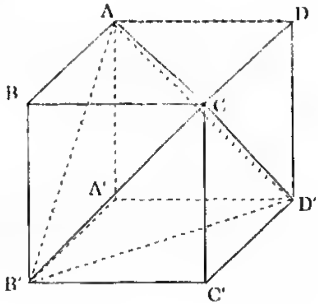
a) Ta có B'D' = BD, vì AB'CD' là tứ diện có các cạnh đối vuông góc. Do vậy,

AC = B'D' $\Leftrightarrow$ AC = BD

Khi đó ABCD là hình chữ nhật

Tương tự ta cũng có ABB'A' và ADD'A' là những hình chữ nhật.

Vậy khi tứ diện AB'CD' có các cạnh đối bằng nhau thì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.



Ngược lại. Khi ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật thì tứ diện AB'CD' có các cạnh đối diện bằng nhau.

b) Ta có: BD // B'D'. Vậy AC ⊥ B'D' ⇔ AC ⊥ BD. Khi đó ABCD là hình thoi. Tương tự như trên ta cũng có ABB'A' và ADD'A' là những hình thoi. Vậy hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thoi (tức sáu mặt của hình hộp là hình thoi)

Cũng dễ thấy rằng nếu ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thoi thì tứ diện AB'CD' có các cặp cạnh đối diện vuông góc.

c) Khi AB'CD' là tứ diện đều thì các cặp cạnh đối diện vừa bằng nhau và vừa vuông góc, áp dụng kết quả a) và b) ta có: Khi AB'CD' là tứ diện đều thì hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương.

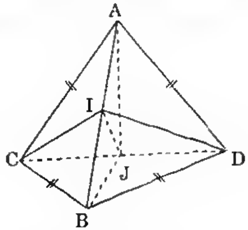
Ngược lại nếu ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương thì AB'CD' là tứ diện đều.

Bài 27. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính AB, IJ theo a và x.

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc?

Giải



a) Vì J là trung điểm của CD và AC = AD nên AJ ⊥ CD.

Do (ACD) ⊥ (BCD) nên AJ ⊥ (BCD)

Mặt khác AC = AD = BC = BD = a

Nên $AB = AJ.\sqrt{2}$, $AJ^2 = a^2 - x^2$

Hay $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$

Vậy $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$ với a > x

Do IA = IB, AJ ⊥ (BCD) nên $JI = \frac{1}{2}AB$ tức là: $IJ = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$

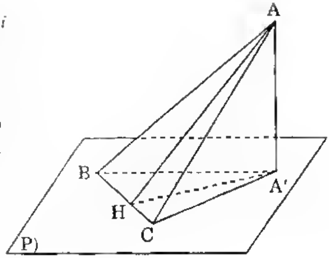
b) Ta có $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$ (vì I là trung điểm AB và AC = CB = BD = DA)

Vậy (ABC) ⊥ (ABD) ⇔ $\widehat{CID} = 90^o$ ⇔ $IJ = \frac{1}{2}CD$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}.2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Bài 28. Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mp(P) và mp(ABC) là φ (φ ≠ 90°); hình chiếu của tam giác ABC trên mp(P) là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng: $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$

Giải



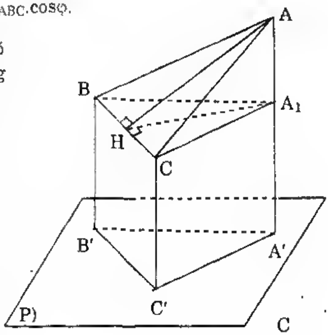
* *Trường hợp 1:* Tam giác ABC có một cạnh nằm trên mặt phẳng (P).

Giả sử $BC \subset (P)$. Gọi A' là hình chiếu của A trên (P). Kẻ đường cao AH của tam giác A'BC thì AH là đường cao của ΔABC. Và $\widehat{A'HA} = \varphi$.

$\Rightarrow A'H = AH.\cos\varphi$.

Suy ra: $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{1}{2}BC.A'H$

$$= \frac{1}{2}BC.AH.\cos\varphi = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi.$$



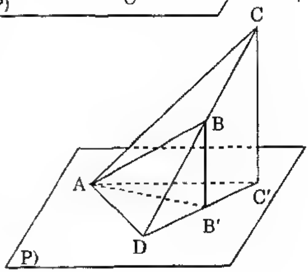
* *Trường hợp 2:* Tam giác ABC có một cạnh song song với (P). Không mất tính tổng quát, giả sử BC // (P).

Xét mặt phẳng (Q) chứa BC và song song với (P). Gọi A_1 là giao của (Q) với AA'

Dễ thấy $\Delta A_1BC = \Delta A'B'C'$

Kẻ đường cao A_1H của ΔA_1BC thì $AH \perp BC$ và $\widehat{AHA_1} = \varphi$. Do vậy:

$$S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta A_1BC} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$$



* *Trường hợp 3:* Tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trên mặt phẳng (P).

Ta có thể giả sử (P) đi qua điểm A sao cho điểm B và C ở về cùng một phía đối với mặt phẳng (P).

Gọi D là giao của BC với (P) và B', C' lần lượt là hình chiếu của B, C trên (P). Khi đó theo *trường hợp 1*, ta có:

$$S_{\Delta ADC'} = S_{\Delta ADC}.\cos\varphi \qquad (1)$$

$$S_{\Delta ADB'} = S_{\Delta ADB}.\cos\varphi \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow S_{\Delta AB'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$

Vậy với mọi trường hợp, ta có: $S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi$

* Tổng quát: Ta có thể chứng minh mệnh đề tổng quát: "Nếu (H') là hình chiếu của hình (H) trên mặt phẳng (P) và φ là góc giữa mp(P) và mặt phẳng chứa hình (H) thì $S_{(H')} = S_{(H)}.\cos\varphi$.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông a, SA ⊥ (ABCD), SA = a. Gọi φ là góc giữa (SAB) và (SAD) khi đó:

(A) $\varphi = 30^o$; (B) $\varphi = 45^o$; (C) $\varphi = 60^o$; (D) $\varphi = 90^o$.

Câu 2. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. SA ⊥ (ABCD), SA = $\sqrt{3}$a. Gọi φ là góc giữa (ABCD) và (SBC). Khi đó:

(A) $\varphi = 30^o$; (B) $\varphi = 45^o$; (C) $\varphi = 60^o$; (D) $\varphi = 90^o$.

Câu 3. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên AD lấy điểm M sao cho AM = x (0 < x < a). Trên đường thẳng d qua A và vuông góc với (ABCD) lấy điểm S sao cho AS = a. Mặt phẳng (SAM) và (SBM) tạo với nhau một góc 60^o khi:

(A) $x = \frac{a}{2}$; (B) $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; (C) $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; (D) $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD), SA = $a\sqrt{3}$. (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SDC). Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp là:

(A) Hình bình hành; (B) Hình thang;

(C) Hình chữ nhật; (D) Hình thang vuông.

Câu 5. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại B. AB = 3, BC = 4, AA' = 6, (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với A'C. Gọi S là diện tích thiết diện tạo bởi (α) và lăng trụ. Khi đó

(A) $S = \sqrt{61}$; (B) $S = \sqrt{52}$; (C) S = 6; (D) S = 5.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(D)	(C)	(B)	(D)	(A)

§5. KHOẢNG CÁCH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khoảng cách từ 1 điểm đến một đường thẳng Δ (đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng Δ (trên mặt phẳng (P))

   Ký hiệu: d(M; (P)) là khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng (P)

   d(M; Δ) là khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng Δ.

2. - Khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).

   Ký hiệu: d(a; (P)) là khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng (P).

   - Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

   Ký hiệu: d((P); (Q)) là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

3. **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:**

- Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng c cắt cả a và b và vuông góc với cả a và b, gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
- Nhận xét:

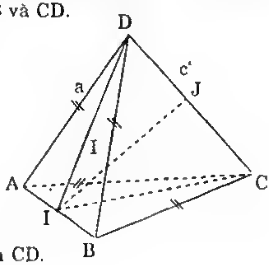
  1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại

  2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 29. Cho tứ diện ABCD có AC = BC = AD = BD = a, AB = c, CD = c'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Giải



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Do tam giác ABD và tam giác ABC cân tại D và C

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp ID \\ AB \perp IC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD)$$

$\Rightarrow$ AB $\perp$ IJ

Tương tự CD $\perp$ IJ

$\Rightarrow$ IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

$\Rightarrow$ d(AB; CD) = IJ

Ta có $IJ = ID^2 - DJ^2$ mà $ID^2 = AD^2 - IA^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4a^2 - c^2}{4}$

và $DJ^2 = \frac{c'^2}{4} \Rightarrow IJ^2 = \frac{4a^2 - c^2}{4} - \frac{c'^2}{4}$

Vậy $IJ = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (c^2 + c'^2)}$ với điều kiện $4a^2 > c^2 + c'^2$

Bài 30. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 30°. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.

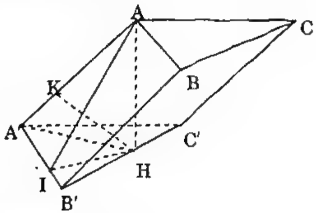
a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và B'C' vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

Giải

a) Ta có do $AH \perp (A'B'C')$ nên $\widehat{AA'H}$ chính là góc giữa AA' và (A'B'C')

$\Rightarrow$ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính là AH,



mà $AH = AA'.\sin 30° = \frac{a}{2}$

Vậy $d((ABC); (A'B'C')) = AH = \frac{a}{2}$.

b) Ta có: $\left.\begin{matrix} A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow B'C' \perp (AA'H)$

$\Rightarrow B'C' \perp A'A$

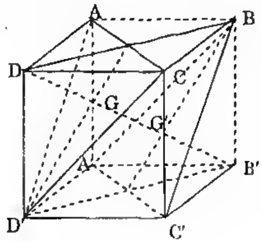
Kẻ $HK \perp AA' \Rightarrow$ HK là khoảng cách giữa AA' và B'C'

Do $AA'.HK = AH.A'H = 2.S_{\Delta AA'H}$

Nên $HK = \frac{AH.A'H}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 31. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Giải



Ta có CD' nằm trong mặt phẳng (ACD') và BC' nằm trong mặt phẳng (BA'C'), mà (ACD') // (BA'C') và CD' và BC' là chéo nhau nên khoảng cách giữa (ACD') và (A'BC') bằng khoảng cách từ BC' đến CD'

Mặt khác hai mặt phẳng (ACD') và (A'BC') chia đoạn DB' thành 3 phần bằng nhau: DG = GG' = G'B'

Lại có B'D có hình chiếu trên mặt phẳng (ABCD) là BD mà AC ⊥ DB nên theo định lý ba đường vuông góc thì DB' ⊥ AC

Hoan toàn tương tự ta được: DB' ⊥ AD'

Vậy DB' ⊥ (ACD)

Như vậy $d(CD'; BC') = \dfrac{DB'}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 32. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = a, AC' = 2a.

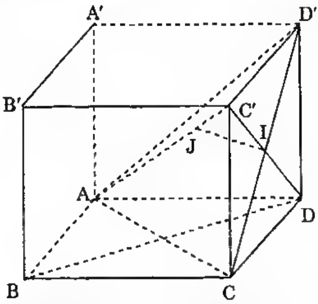
a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD')

b) Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

Giải

a) Xét tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc với nhau, nên gọi H là hình chiếu của D lên (ACD'), ta dễ chứng minh được:

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2}$$



(theo bài tập 5 §3 (III))

mà DD' = a, DC = a

Lại có do ΔACD vuông tại D

$\Rightarrow AC'^2 = AC^2 + CC'^2$

$= AD^2 + CD^2 + CC'^2$

$\Rightarrow AD^2 = AC'^2 - CD^2 - CC'^2 = 2a^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2}$

Vậy $DH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

b) Vì CD = DD' = a, nên CD' ⊥ C'D. Mặt khác AD ⊥ (CDD'C') nên CD' ⊥ AC' (định lý ba đường vuông góc) và CD' ⊥ (AC'D)

Gọi I là giao điểm của CD' với (AC'D)

Xét trong mặt phẳng (AC'D) kẻ IJ vuông góc với AC'

⇒ IJ là đường vuông góc chung của AC' và CD'

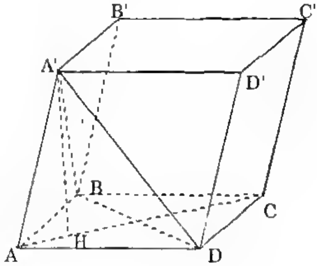
Dễ thấy ΔADC' ~ ΔIJC'

$\Rightarrow \dfrac{IJ}{AD} = \dfrac{IC'}{AC'} \Rightarrow IJ = AD.\dfrac{C'D}{2AC'}$, mà $C'D = a\sqrt{2}$

Vậy $IJ = a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2.2a} = \dfrac{a}{2}$.

Bài 33. Cho hình hộp thoi ABCD. A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D').

Giải



Do $\widehat{DAA'} = \widehat{BAA'} = 60^\circ$

Nên $\widehat{D'A'A} = \widehat{B'A'A} = 120^\circ$

Lại có, do các cạnh của hình hộp bằng a nên ADD'A' và ABB'A' là những hình thoi

$\Rightarrow \widehat{AA'D} = \widehat{AA'B} = 60^\circ$.

Như vậy tứ diện A'ABD có các cạnh cùng bằng a

$\Rightarrow$ Tứ diện A'ABD là tứ diện đều.

$\Rightarrow$ Hình chiếu H của A' lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm tam giác ABD

$\Rightarrow \quad d((ABCD); (A'B'C'D')) = A'H$

Ta có: $A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{2a^2}{3}$

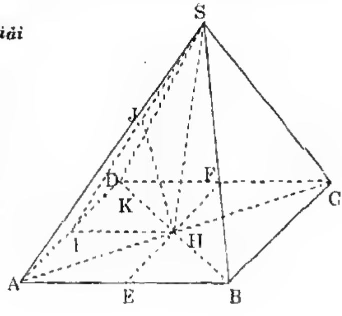
Vậy $A'H = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 34. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD)

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD; K là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K, hãy tính khoảng cách đó theo a.

Giải



a) Vì $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$, nên hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H mà HA = HB = HC = HD. Do ABCD là hình chữ nhật nên H là giao của AC và BD. Vậy khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) bằng SH.

Ta có: $SH^2 = SA^2 - \dfrac{AC^2}{4} = 2a^2 - \dfrac{AB^2 + BC^2}{4}$

$$= 2a^2 - \frac{4a^2 + a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

Vậy $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Vì EF // AD, nên EF // (SAD). Mặt khác SK ⊂ (SAD), nên khoảng cách giữa EF và SK chính là khoảng cách giữa EF và (SAD), đó chính là khoảng cách từ H đến (SAD). Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của điểm K trên đường thẳng AD.

Gọi I là trung điểm AD, kẻ đường cao HJ của tam giác vuông SHI thì HJ ⊥ (SAD), do đó: d(H; (SAD)) = HJ.

Ta có $\Delta HSI \sim \Delta JIH$

$$\Rightarrow \quad \frac{HS}{JH} = \frac{SI}{HI} \Rightarrow HI.SH = HJ.SI$$

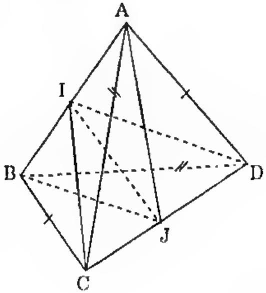
mà $SI^2 = SA^2 - AI^2 = 2a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$

Từ đó $HJ = \dfrac{SH.HI}{SI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Vậy khoảng cách giữa EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K thuộc đường thẳng AD và bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 35. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu AC = BD, AD = BC thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng nối trung điểm của AB và CD. Điều ngược lại có đúng không?

Giải



a) Do AC = BD, AD = BC

$\Rightarrow \quad \Delta BCD = \Delta ADC$

$\Rightarrow$ Hai trung tuyến tương ứng BJ và AJ bằng nhau (J là trung điểm CD). Gọi I là trung điểm của AB. Ta có

IJ ⊥ AB (vì ΔABJ cân tại J)

Tương tự như trên, thì ta có IJ ⊥ CD.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Điều ngược lại của kết luận nêu ra trong bài toán cũng đúng, tức là nếu $IJ \perp AB$, $IJ \perp CD$, với I, J lần lượt là trung điểm AB và CD thì AC = BD; AD = BC. Thật vậy:

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

Từ đó ta có: $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$ (1)

Tương tự như trên ta cũng có:

$$CB^2 + CA^2 = DB^2 + DA^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta suy ra $AD^2 - BC^2 = BC^2 - DA^2$ tức DA = BC.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow$ AC = BD.

III. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = OB = OC = a. Gọi d(OA, BC) là độ dài đoạn vuông góc chung của OA và BC. Khi đó, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) d(OA; BC) = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) d(OA; BC) = $\frac{a}{2}$;

(C) d(OA; BC) = $a\sqrt{2}$; (D) d(OA; BC) = a.

Câu 2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là:

(A) $a\sqrt{3}$; (B) $a\sqrt{2}$; (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; (D) 3a.

Câu 3. Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, SA = a, khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là:

(A) $a\sqrt{6}$; (B) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; (C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; (D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và $SA \perp (ABCD)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) Tam giác SAB là tam giác vuông tại A;

(B) Tam giác SBC là tam giác vuông tại B;

(C) Tam giác SCD là tam giác vuông tại D;

(D) Tam giác SCD là tam giác vuông tại C.

Câu 5. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, BC = a, SA = 2a, $SA \perp (ABC)$. Khoảng cách giữa AC và SD là:

(A) $a\sqrt{17}$; (B) $\frac{2a}{\sqrt{17}}$; (C) a; (D) $\frac{a}{2}$.

IV. ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	(A)	(C)	(B)	(D)	(B)

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

I. CÂU HỎI TỰ KIỂM TRA

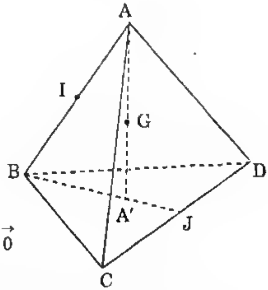
Câu 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tứ diện và A' là trọng tâm tam giác BCD. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ với M là một điểm tùy ý;

c) $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$;

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AA'}$.



Trả lời

a) Khẳng định $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ là đúng, thật vậy: Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD

$\Rightarrow$ G là trung điểm IJ (vì G là trọng tâm)

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$

b) Với M bất kỳ, ta có:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG}$ (theo a). Vậy b) là khẳng định đúng.

c) Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ mà $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}$ (vì A' là trọng tâm ΔBCD)

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ mà: $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AG}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GA} = -3(\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AG}) \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

Vậy c) sai.

d) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D}$

$= 3\overrightarrow{AA'} + (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}) = 3\overrightarrow{AA'}$

(vì A' là trọng tâm tam giác BCD). Vậy d) đúng.

Câu 2. Trong không gian, hãy nêu cách chứng minh:

a) Đường thẳng vuông góc với đường thẳng;

b) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng;

c) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Trả lời

a) *Cách 1:* Ta chứng minh góc tạo bởi hai đường thẳng bằng 90°.

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng thứ nhất vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng thứ hai.

b) Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta chứng minh đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng.

Hoặc ta chứng minh góc tạo bởi 1 đường thẳng và mặt phẳng bằng 90°.

c) Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau:

Cách 1: Ta chứng minh trong mặt phẳng này tồn tại một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Cách 2: Ta chứng minh góc tạo bởi hai mặt phẳng bằng 90°.

Câu 3. Hãy nêu cách tính:

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng;

b) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng;

c) Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nó;

d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song;

e) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Trả lời

a) Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (Δ)

- Xác định hình chiếu H của M trên đường thẳng (Δ)
- Tính MH khi đó $d(M; (\Delta)) = MH$.

b) Để tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) ta:

- Xác định hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng (α)
- Tính MH. Khi đó $d(M; (\alpha)) = MH$;

c) Để tính khoảng cách từ một đường thẳng Δ và một mặt phẳng (α) song song với nó ta:

- Lấy 1 điểm M trên Δ, xác định hình chiếu H của M trên (α)
- Tính MH. Khi đó $d(\Delta; (\alpha)) = MH$;

d) Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau:

- Lấy điểm $M \in (\alpha)$, xác định hình chiếu H của điểm M trên (β).
- Tính MH. Khi đó $d((\alpha); (\beta)) = d(M; (\beta)) = MH$;

c) Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

- Xác định đường vuông góc chung của a và b

- Tính độ dài đoạn vuông góc chung của a và b. Khi đó độ dài đoạn vuông góc chung là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

II. BÀI TẬP

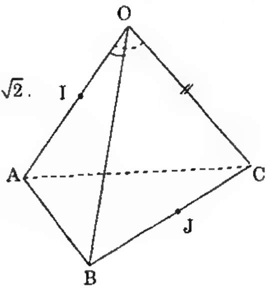
Bài 1. Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$; $\widehat{BOC} = 90^\circ$.

a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông và OA ⊥ BC.

b) Tìm đường vuông góc chung IJ của OA và BC; tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

Giải



a) Do $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$,

OA = OB = OC = a nên AB = AC = a

Lại có $\widehat{BOC} = 90^\circ$, OB = OC = a nên BC = $a\sqrt{2}$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi J là trung điểm của BC thì OJ ⊥ BC, AJ ⊥ BC, nên BC ⊥ (AOJ)

$\Rightarrow$ OA ⊥ BC.

b) Gọi I là trung điểm của OA, do OJ = AJ nên OA ⊥ IJ, mà IJ ⊥ BC.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.

$$d(OA; BC) = IJ \text{ mà } IJ^2 = OJ^2 - OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad d(OA; BC) = \frac{a}{2}$$

c) Từ kết quả trên, ta có OJ ⊥ BC, AJ ⊥ BC, $IJ = \frac{1}{2}OA$

$\Rightarrow$ ΔAJO vuông tại J $\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (OBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 90°, do đó (OBC) ⊥ (ABC).

Bài 2. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.

a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông.

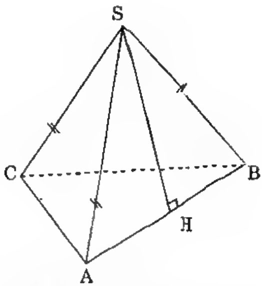
b) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SA})(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{CS}^2 - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$



Vậy tam giác ABC vuông tại C.

b) Kẻ SH $\perp$ (ABC)

Do SA = SB = SC nên HA = HB = HC

Mà ΔABC vuông tại C, nên H là trung điểm của AB. Ta có:

$$SH^2 = SA^2 - \frac{AB^2}{4} = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Vậy SH = $\frac{a}{2}$.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD). Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD. Đặt CM = x, CN = y. Tìm hệ thức giữa x và y để:

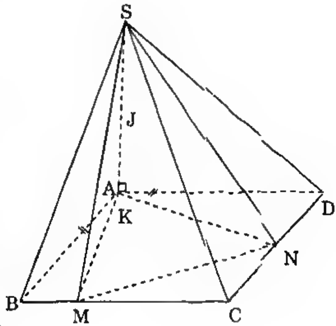
a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 45°.

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải

a) Ta có: Do SA $\perp$ (ABCD)

$$\Rightarrow \begin{cases} SA \perp AM \\ SA \perp AN \end{cases} \text{mà } \widehat{MAN} \le 90^\circ.$$



nên $\widehat{MAN}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN)

Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 45° khi và chỉ khi $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

Mặt khác M $\in$ BC, N $\in$ CD, $\widehat{BAD} = 90^\circ$, nên điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$.

Do vậy, ta có:

$$\tan 45^\circ = \frac{\tan\widehat{BAM} + \tan\widehat{DAN}}{1 - \tan\widehat{BAM}.\tan\widehat{DAN}} \quad (*)$$

Mà $\tan\widehat{BAM} = \dfrac{a-x}{a}$; $\tan\widehat{DAN} = \dfrac{a-y}{a}$

Nên từ (*), suy ra $2a^2 + xy = 2a(x + y)$

Vậy $2a^2 + xy = 2a(x + y)$ là hệ thức để (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45°.

b) Ta có (SAM) ⊥ (ABCD), do vậy nếu (SMN) ⊥ (SAM) thì giao tuyến MN của (SMN) và (ABCD) sẽ vuông góc với (SAM) tức là MN ⊥ AM.

Ngược lại, nếu MN ⊥ AM, do SA ⊥ MN

$\Rightarrow$ MN ⊥ (SAM) hay (SMN) ⊥ (SAM)

Vậy (SAM) ⊥ (SMN) $\Leftrightarrow$ $\widehat{AMN} = 90^\circ$.

Tức là: $a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2$

Hay $y = \dfrac{(a-x)x}{a}$ với $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$

Là hệ thức liên hệ giữa x, y, a để (SAM) ⊥ (SMN).

Bài 4. Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong mặt phẳng (P), cạnh AB và AC lần lượt tạo với mặt phẳng (P) các góc β và γ. Gọi α là góc tạo bởi mp(P) và mp(ABC). Chứng minh rằng $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

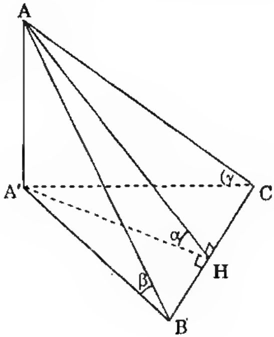
Giải

Kẻ AA' ⊥ (P) (A' ∈ (P)). Thì $\widehat{ABA'}$ và $\widehat{ACA'}$ lần lượt là góc giữa AB, AC với mặt phẳng (P).

Theo giả thiết, suy ra:

$\widehat{ABA'} = \beta$, $\widehat{ACA'} = \gamma$

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Do AA' ⊥ (P) nên A'H ⊥ BC, như vậy $\widehat{AHA'} = \alpha$.



Ta có $\sin\beta = \dfrac{AA'}{AB}$, $\sin\gamma = \dfrac{AA'}{AC}$,

$\sin\alpha = \dfrac{AA'}{AH}$

Trong tam giác vuông ABC ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Suy ra: $\dfrac{AA'^2}{AH^2} = \dfrac{AA'^2}{AB^2} + \dfrac{AA'^2}{AC^2}$

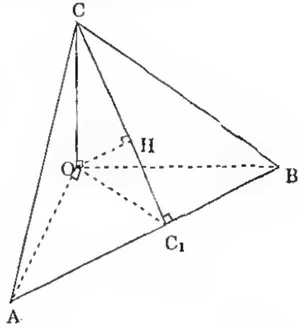
hay $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Bài 5. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Tính diện tích của các tam giác HAB, HBC và HCA.

Giải

Do OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC), nên H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi C_1 là giao điểm của CH với AB



$\Rightarrow \quad HC_1 \perp AB$

$\Rightarrow \quad OC_1 \perp AB.$

Như vậy $\widehat{OC_1C}$ là góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng (ABC).

Khi đó: $S_{\Delta HAB} = \dfrac{1}{2}HC_1.AB$

$$= \frac{1}{2}AB.OC_1.\cos\widehat{HC_1O}$$

$$= S_{OAB}.\cos\widehat{HC_1O}$$

mà $\widehat{OC_1H} = \widehat{HOC}$ nên

$$S_{\Delta HAB} = S_{\Delta OAB}.\cos\widehat{HOC}$$

Ta lại có: $\cos\widehat{HOC} = \dfrac{OH}{OC}$

Mà $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$\Rightarrow \cos\widehat{HOC} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Mặt khác $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}ab$

Vậy $S_{\Delta HAB} = \dfrac{1}{2}ab.\dfrac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \dfrac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Hoàn toàn tương tự, ta được: $S_{\Delta HBC} = \dfrac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

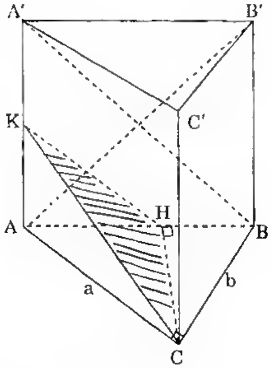
$$S_{\Delta HCA} = \frac{c^2a^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Bài 6. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, CA = a, CB = b; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P). Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện nói trên.

Giải



a) Kẻ đường cao CH của tam giác vuông ABC.

$\Rightarrow$ CH $\perp$ AB' (định lý ba đường vuông góc)

Trong mặt phẳng (ABB'A'), kẻ Hx vuông góc với AB'. Khi đó (P) là mặt phẳng (CHx)

Lại có do ABB'A' là hình vuông

$\Rightarrow$ AB' $\perp$ A'B. Vậy Hx // A'B

$\Rightarrow$ Hx cắt AA' tại điểm K thuộc đoạn AA'. Như vậy thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi (P) là tam giác KCH.

Ta có, do CH $\perp$ AB, (ABB'A') $\perp$ (ABC) nên CH $\perp$ (ABB'A'), từ đó tam giác CHK vuông tại H.

Vậy thiết diện tạo bởi (P) và lăng trụ là tam giác vuông KCH.

b) Ta có: $S_{\Delta CHK} = \dfrac{1}{2}CH.HK$

mà do $\Delta ABC \sim \Delta CHB$

$$\Rightarrow \quad \frac{CH}{BC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \; CH = \frac{AB.BC}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lại có: $AH.AB = a^2 \Rightarrow AH = \dfrac{a^2}{AB} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Ta có: $\dfrac{HK}{A'B} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow HK = \dfrac{AH.A'B}{AB}$

$$\Rightarrow HK = \frac{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Suy ra: $S_{ACHK} = \frac{1}{2}.\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}a^3b}{2(a^2+b^2)}$.

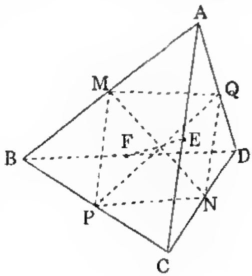
Bài 7. Một tứ diện được gọi là **gần đều** nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện ABCD, chứng tỏ rằng các tính chất sau là tương đương.

a) Tứ diện ABCD là gần đều.

b) Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau;

c) Các **trọng tuyến** (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau.

d) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng 180°.



Giải

Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD

Ta chứng minh:

• a) ⇔ b). Thật vậy:

· a) ⇒ b). Do AC = BD, nên MPNQ là hình thoi, vì thế MN ⊥ PQ.

Tương tự ta có MN ⊥ EF, PQ ⊥ EF

• b) ⇒ a). Ta có MPNQ là hình bình hành mà MN ⊥ PQ nên MPNQ là hình thoi, tức là MP = MQ, từ đó AC = BD.

Tương tự như trên, ta cũng có BC = AD, AB = CD.

• a) ⇔ c). Thật vậy ta chứng minh:

a) ⇒ c). Ta có ΔBCD = ΔADC (c – c – c) nên BN = AN, từ đó A'N = B'N (với A', B' lần lượt là trọng tâm ΔBCD và ACD)

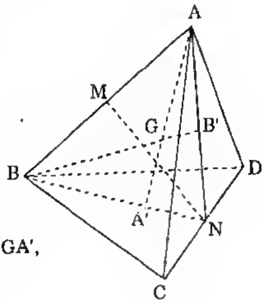
Vậy ΔAA'N = ΔBB'N

⇒ AA' = BB'

Tương tự như trên ta có điều phải chứng minh c) ⇒ a)

Do giả thiết ta có AA' = BB'

Mà AA' cắt BB' tại G, dễ thấy AG = 3GA', BG = 3GB' (Bài tập chương 2)



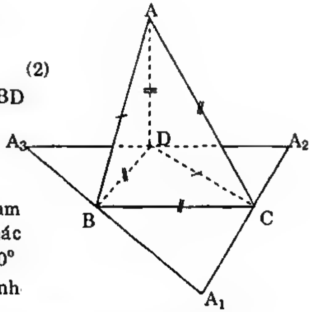
$\Rightarrow BG = AG$ và $GA' = GB'$.

Lại có $\Delta BGA' = \Delta AGB'$ nên $BA' = AB'$. Như vậy $BN = AN$

Mà $AC^2 + AD^2 = 2AN^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

$BC^2 + BD^2 = 2BN^2 + \dfrac{CD^2}{2}$

Do đó: $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$ (1)



Tương tự như trên ta có:

$CA^2 + CB^2 = DB^2 + DA^2$ (2)

Từ (1), (2), suy ra $AD = BC$ và $AC = BD$

Tương tự ta cũng có $AB = CD$.

Vậy a) $\Leftrightarrow$ c).

a) $\Leftrightarrow$ d). Ta chứng minh:

a) $\Rightarrow$ d): Do sự bằng nhau của các tam giác ABC, CDA, BAD với tam giác DCB nên tổng các góc tại B bằng 180°

Hoàn toàn tương tự đối với các đỉnh còn lại của tứ diện.

d) $\Rightarrow$ a): Trải các mặt ABC, ACD, ABD trên mặt phẳng (BCD).

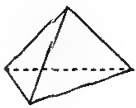
Do tổng các góc tại B cũng như tại C và D đều bằng 180° nên các điểm A_1, C, A_2; D, A_3, A_2; A_3, B, A_1 là những bộ ba điểm thẳng hàng. Như vậy BC, CD, BD là ba đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$

Dễ thấy $BD = A_1C = CA_2 = CA$.

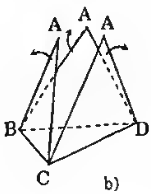
Tương tự ta cũng có $AD = BC$, $CD = AB$

Vậy a) $\Leftrightarrow$ d).

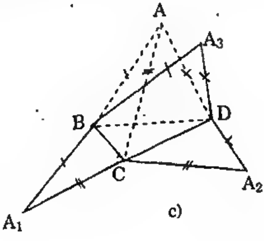
Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Cắt tứ diện đó theo các cạnh AB, AC, AD và trải các mặt ABC, ACD, ADB trên mặt phẳng (BCD). (xem hình dưới đây). Hình phẳng gồm các tam giác BCD, A_1BC, A_2CD, A_3BD gọi là hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD).



a)



b)



c)

a) Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện gần đều ABCD trên mặt phẳng (BCD) là một tam giác nhọn.

b) Dùng bìa cứng cắt và dán để có một tứ diện gần đều.

Giải

a) Xem hình bài 10.

Do phần chứng minh d) ⇒ a) của bài 10 thì ta có hình khai triển của tứ diện ABCD trên mặt phẳng (BCD) là tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chỉ cần chứng minh tam giác $A_2A_2A_3$ là tam giác nhọn

Thật vậy, xét tam giác AA_1A_2 có $AC = A_1C = A_2C$ nên $AA_1 \perp AA_2$. Lý luận tương tự như trên ta có AA_1, AA_2, AA_3 đôi một vuông góc. Từ đó tứ diện $AA_1A_2A_3$ có mặt $A_1A_2A_3$ là tam giác nhọn.

b) Học sinh tự làm.

III. CÁC CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình tứ diện ABCD có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là sai?

(A) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$;

(B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$;

(D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Giải

Do G là trọng tâm tứ diện ABCD, nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \text{(B) đúng}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \Rightarrow \text{A đúng.}$$

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

$$= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{AG}$$

⇒ (D) đúng, (C) sai.

Vậy (C) là đáp án cần tìm.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau;

(B) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau;

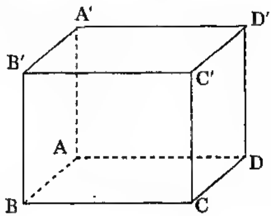
(C) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia;

(D) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

Giải

(C) là đáp án cần tìm được suy ra từ định lý.

Mệnh đề (A), (B), (D) sai ví dụ: Xét hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Ta có:



- $\begin{cases} AB \perp AA' \\ AD \perp AA' \end{cases}$ song $AB \perp AD \Rightarrow$ (A) sai.

- $\begin{cases} AD \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases}$ song $AD \parallel BC \Rightarrow$ (B) sai.

- Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD \\ AA' \perp AB \end{cases}$ song $AA' \perp AD$

$\Rightarrow$ (D) sai.

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

(A) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$;

(B) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$;

(C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$;

(D) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

Giải

Ta có: do

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a \Rightarrow$ (A) là mệnh đề đúng.

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (P) \\ a, b \text{ phân biệt} \end{cases} \Rightarrow a \parallel b \Rightarrow$ (B) là mệnh đề đúng.

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \parallel a \end{cases} \Rightarrow b \perp (P) \Rightarrow$ (C) là mệnh đề đúng.

• $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \,//\, (P) \\ a \subset (P) \end{array}\right. \Rightarrow$ (D) là mệnh đề sai.

Vậy (D) là đáp án cần tìm.

Câu 4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song;

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song;

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song;

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Giải

Giả sử $\left.\begin{array}{l} (P) \neq (Q) \\ a \perp (P) \\ a \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \,//\, (Q)$

Vậy (C) là đáp án cần tìm.

Câu 5. Mệnh đề nào là đúng?

(A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia;

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau;

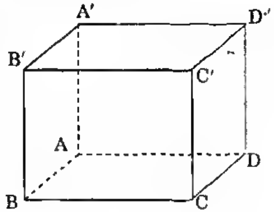
(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau;

(D) Ba mệnh đề trên đều sai.

Giải

• Mệnh đề (A) là sai. Ví dụ: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' thì mặt phẳng (ABCD) và (AA'B'B) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau song đường thẳng AB' lại không vuông góc với (ABCD) mà AB' ⊂ (AA'B'B).

• Mệnh đề (B) là sai. Ví dụ: cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' thì (BB'C'C) ⊥ (ABCD), (AA'D'D) ⊥ (ABCD) song (AA'D'D) và (BB'C'C) lại không vuông góc với nhau.



• Mệnh đề (C) là sai. Ví dụ: (ABCD) ⊥ (AA'D'D), (ABCD) ⊥ (AA'B'B) song (AA'B'B) và (AA'D'D) lại không song song với nhau

Vậy (D) là mệnh đề đúng. Do vậy (D) là đáp án cần tìm.

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước;

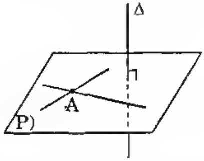
(B) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước;

(C) Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước;

(D) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

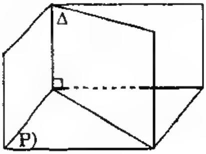
Giải

• Mệnh đề (A) là sai. Thật vậy, giả sử (P) là mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với đường thẳng Δ ⇒ qua A có vô số đường thẳng nằm trong (P) và vuông góc với Δ.

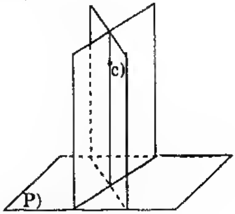


• Mệnh đề (B) là sai. Thật vậy khi đường thẳng Δ cho trước vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước thì có vô số mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (P) (xem hình a) dưới đây)

• Mệnh đề (C) là sai, thật vậy xem hình b)



(a)



(b)

• Mệnh đề (D) là đúng. Được suy ra từ định nghĩa và hệ quả.

Vậy (D) là đáp án cần tìm.

Câu 7. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật;

(B) Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật;

(C) Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật;

(D) Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Giải

Do hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật $\Rightarrow$ (A), (B), (C) là các mệnh đề sai.

Do có 5 mặt là hình chữ nhật $\Rightarrow$ hình hộp là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ (D) đúng.

Vậy (D) là đáp án cần tìm.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương;

(B) Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương;

(C) Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương;

(D) Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Giải

Mệnh đề (A), (C), (D) là mệnh đề sai.

Mệnh đề (B) là mệnh đề đúng. Vậy (B) là đáp án cần tìm.

Câu 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân;

(B) S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân với đỉnh S;

(C) S.ABC là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt chứa các mặt bên và mặt phẳng chứa đáy bằng nhau;

(D) S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

Giải

Mệnh đề (A), (C), (D) là mệnh đề sai.

Mệnh đề (B) đúng. Vậy (B) là đáp án cần tìm.

Câu 10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia;

(B) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia;

(C) Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó;

(D) Các mệnh đề trên đều sai.

Giải

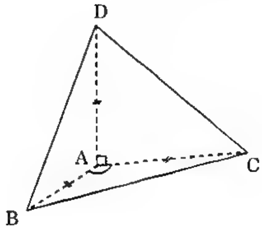
Các mệnh đề (A), (B), (C) đều sai.

Vậy (D) là đáp án cần tìm.

Câu 11. Hình tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc và AB = AC = AD = 3. Diện tích tam giác BCD bằng:

(A) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{9\sqrt{2}}{3}$; (C) 27; (D) $\frac{27}{2}$.

Giải



Do AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và bằng nhau

$\Rightarrow$ BC = CD = BD

và $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 9 = 18$

$\Rightarrow$ $BC = CD = DB = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $S_{ABCD} = \frac{1}{2}.BD.BC.\sin 60^\circ$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}.3\sqrt{2}.3\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vậy (A) là đáp án cần tìm.

Câu 12. Hình hộp ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = AD = a và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Khi đó khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện A'ABD bằng:

(A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (C) $a\sqrt{2}$; (D) $\frac{3a}{2}$.

Giải

Ta có Do AB = AA = AD = a và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$.

$\Rightarrow$ tứ diện A'ABD có tất cả các cạnh bằng a.

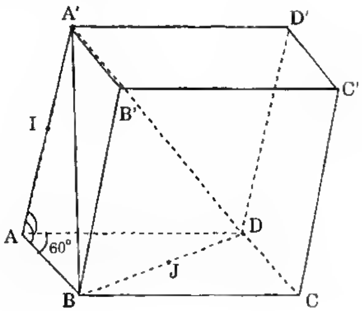
$\Rightarrow$ Khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện A'ABD đều bằng nhau và bằng độ dài IJ với I, J lần lượt là trung điểm của AA' và BD.

(Ta dễ chứng minh được IJ là đường vuông góc chung của AA' và BD)

Ta có $IJ = \sqrt{AJ^2 - AI^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy (A) là đáp án cần tìm.



BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB

a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NMC, MNP. Tìm phép dời hình biến tam giác APN lần lượt thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Phép vị tự nào biến tam giác ABC thành tam giác MNP?

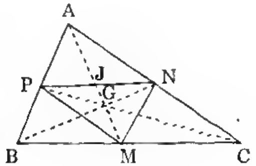
c) Xét tam giác có ba đỉnh là trực tâm của ba tam giác APN, PBM và NCM. Chứng tỏ rằng tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng minh điều đó cũng đúng nếu thay trực tâm bằng trọng tâm, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp, hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

Giải

a) Phép tịnh tiến $T_{\vec{AP}}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM.

• Phép tịnh tiến $T_{\vec{AN}}$ biến tam giác APN thành tam giác NMC.

• Phép đối xứng tâm J với J là trung điểm của PN biến tam giác APN thành tam giác MNP.



b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

Vậy phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

c) Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là trực tâm các tam giác APN, PBM, NMC.

Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AP}}$ biến ΔAPN thành ΔPBN nên biến H_1 thành H_2 tức là $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{AP}$. Hay $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2}$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{AN}$. Hay $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{NH_3}$

Vậy $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{PH_2} = \overrightarrow{NH_3}$

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AH_1}$ biến ΔAPN thành $\Delta H_1H_2H_3$

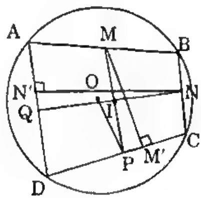
Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được đối với các trường hợp khác (trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, ...)

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Kẻ MM′, NN′, PP′, QQ′ lần lượt vuông góc với CD, DA, AB, BC.

a) Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Phép đối xứng tâm D_I biến các đường thẳng MM′, NN′, PP′, QQ′ thành những đường thẳng nào?

b) Chứng tỏ rằng bốn đường thẳng MM′, NN′, PP′, QQ′ đồng quy tại một điểm. Nhận xét gì về vị trí điểm đồng quy và hai điểm I, O?

Giải



a) Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA

⇒ Tứ giác MNPQ là hình bình hành

⇒ I là trung điểm của MP và NQ

Phép đối xứng tâm I biến điểm M thành điểm P, biến đường thẳng MM′ thành đường thẳng đi qua P và song song với MM′. Tức là đường thẳng vuông góc DC.

Vậy đường thẳng MM′ biến thành đường thẳng PP′.

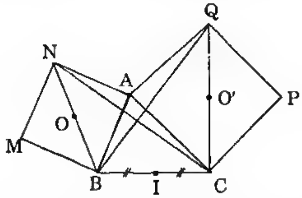
Hoàn toàn tương tự, đường thẳng NN′ biến thành đường thẳng QO

đường thẳng PO biến thành đường thẳng MO

đường thẳng QQ′ biến thành đường thẳng NO

b) Vì bốn đường thẳng QO, PO, NO, MO đồng quy tại O, nên 4 đường thẳng NN', PP', QQ', MM' đồng quy tại điểm O' đối xứng O qua I.

Bài 3. Cho tam giác ABC và hai hình vuông ABMN và ACPQ như hình sau:



a) Xác định phép quay biến tam giác ABQ thành tam giác ANC

b) Chứng tỏ rằng hai đoạn thẳng BQ, CN bằng nhau và vuông góc với nhau.

c) Gọi O, O' là tâm của các hình vuông, I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác OIO' là tam giác vuông cân.

Giải

a) Ta có AB = AN, AQ = AC và góc (AB, AN) = (AQ, AC) = -90°

$\Rightarrow$ Phép quay Q với tâm A và góc quay $\varphi = -90^\circ$ biến tam giác ABQ thành tam giác ANC.

b) Do đoạn thẳng BQ biến thành đoạn NC bởi phép quay Q tâm A, góc quay $\varphi = -90^\circ$ nên BQ = NC và BQ $\perp$ NC.

c) Gọi O là tâm hình vuông ABMN, O' là tâm hình vuông ACPQ.

Ta có: OI // NC, $OI = \frac{1}{2}NC$

OI' // QB và $O'I = \frac{1}{2}QB$.

Vậy từ câu b) ta suy ra ΔIOO' vuông cân tại đỉnh I.

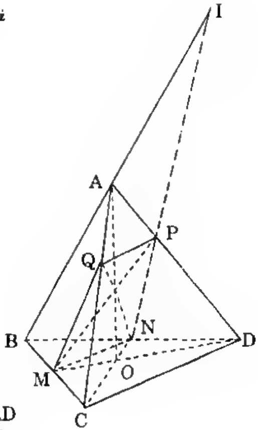
Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD; P là điểm thay đổi trên đoạn thẳng AD.

a) Xác định giao điểm Q của mặt phẳng (MNP) và cạnh AC. Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Tìm quỹ tích giao điểm I của QM và PN

c) Tìm quỹ tích giao điểm J của QN và PM

Giải



a) Kẻ PQ song song với CD cắt AC tại Q ($Q \in AC$).

Ta thấy tứ giác MNPQ là hình thang vì:

$$\begin{cases} PQ \parallel CD \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN$$

(Nếu $P \equiv A$ thì $Q \equiv A \equiv P$, nếu $P \equiv D$ thì $Q \equiv C$).

b) Phần thuận: Giả sử I là giao điểm của QM và PN. Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (MNPQ) thì điểm I thuộc đường thẳng AB

Vì P thay đổi trên đoạn thẳng AD nên dễ thấy I chỉ nằm trên phần của đường thẳng AB trừ đi các điểm trong đoạn AB

Phần đảo: Lấy một điểm I bất kỳ thuộc đường thẳng AB nhưng không nằm trong đoạn AB. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của IN với AD, của IM với AC

Khi đó rõ ràng mặt phẳng (MNP) cắt AC tại Q và giao điểm của QM và PN tại I.

Vậy quỹ tích giao điểm I của QM và PN là đường thẳng AB trừ đi các điểm trong đoạn AB.

c) Tương tự như câu b) ta có quỹ tích giao điểm J của QN và PM là đoạn thẳng AO (O là giao điểm của DM và CN)

Bài 5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Điểm M nằm giữa A và D, điểm N nằm giữa C và C' sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$

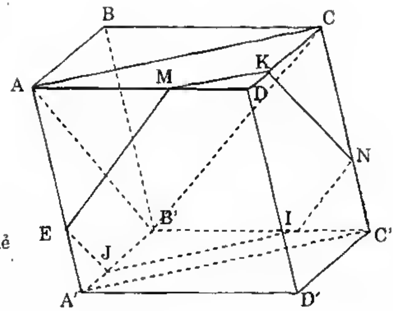
a) Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACB')

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB')

Giải

a) Ta có: $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$

$$\Rightarrow \quad \frac{AM}{CN} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{CC'}$$



Theo định lý talet đảo thì MN song song với mặt phẳng (P) (trong đó (P) song song với AC và DC′)

Mặt khác DC′ // AB′.

Vậy MN // (ACB′).

b) Kẻ MK // AC ($K \in CD$); kẻ NI // CB′ ($I \in B'C'$);

kẻ IJ // A′C′ ($J \in A'B'$);

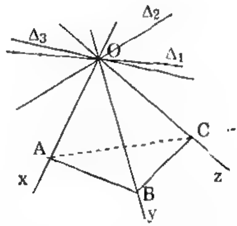
kẻ JE // AB′ ($E \in AA'$)

Khi đó thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB′) là lục giác MKNIJE.

Bài 6. Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Chứng minh rằng các tia phân giác ngoài của các góc xOy, yOz và zOx đồng phẳng.

Giải

Gọi Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt là ba tia phân giác ngoài của các góc xOy, yOz, zOx.



Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho OA = OB = OC thì dễ thấy

Δ_1 // AB, Δ_2 // BC, Δ_3 // CA.

mà Δ_1, Δ_2, Δ_3 đều đi qua O

Vậy Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng phẳng.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABC. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC; M là điểm nằm giữa S và C.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.

b) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mặt phẳng (KMN). Chứng tỏ rằng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Giải

a) Gọi L là trung điểm của SB

Suy ra: KL // AB, LN // SC

Mà mặt phẳng (α) đi qua K và song song với AB và SC

$\Rightarrow \begin{cases}(\alpha) \supset KL \\ (\alpha) \supset LN\end{cases}$

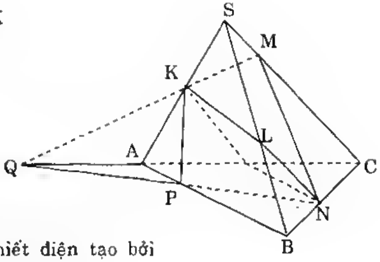
Vậy $N \in (\alpha) \Rightarrow$ đpcm.

b) Kéo dài MK cắt AC tại Q

$\Rightarrow Q \in (ABC)$

Nối Q với N cắt AB tại P

Khi đó tứ giác KMNP là thiết diện tạo bởi mặt phẳng MNK với hình chóp SABC.



Bài 8. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AB tới mặt phẳng (SCD).

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P). Tính diện tích thiết diện.

e) Tính góc hợp bởi đường thẳng AB và (P).

Giải

Gọi H là giao điểm của AC và BD

Do SABCD là hình chóp đều nên $SH \perp (ABCD)$

a) Khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD) là SH

$SH^2 = SA^2 - AH^2$

$$= 2a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2}$$

Vậy $d(S, (ABCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

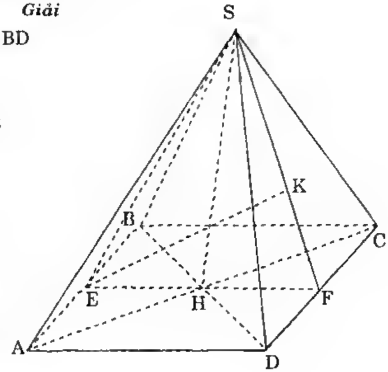
b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD

Từ E hạ $EK \perp SF$

$\Rightarrow EK \perp (SDC)$

$\Rightarrow EK = d(AB, (SCD))$

Ta có do tam giác EKF đồng dạng với tam giác SHF



$$\Rightarrow \quad \frac{EK}{EF} = \frac{SH}{SF}$$

$$\Rightarrow \quad EK = \frac{SH.EF}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}.a}{\sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

Vậy d(AB; (SCD)) = $\frac{a\sqrt{42}}{7}$

c) Ta có AB // (SCD) mà AB và SC là hai đường thẳng chéo nhau

$\Rightarrow$ d(AB; SC) = d(AB; (SCD)) = $\frac{a\sqrt{42}}{7}$

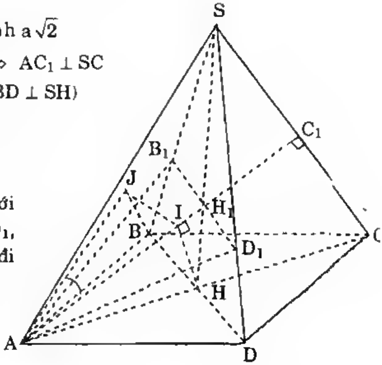
d) Ta có AC = $a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ΔSAC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}$

Gọi C_1 là trung điểm của SC $\Rightarrow$ $AC_1 \perp SC$

Lại có BD $\perp$ SC (vì BD $\perp$ HC, BD $\perp$ SH)

Nên mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng chứa AC_1 và song song với BD.



Gọi H_1 là giao điểm của AC_1 với SH. Khi đó (P) $\cap$ (SBD) = B_1D_1, trong đó B_1D_1 là đường thẳng đi qua H_1 và song song với BD

Vậy thiết diện của S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $AB_1C_1D_1$

Ta có BD $\perp$ (SAC), B_1D_1 // BD nên $B_1D_1 \perp$ (SAC), suy ra $B_1D_1 \perp AC_1$

Từ đó $S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}AC_1.B_1D_1$

Mà AC_1 là đường cao tam giác đều SAC cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow AC_1 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$B_1D_1 = \frac{2}{3}BD$ (vì H_1 là trọng tâm tam giác SAC)

$= \frac{2}{3}.a\sqrt{2}$;

Vậy $S_{AB_1C_1D_1} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2\sqrt{2}a}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

e) Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HI \perp AC_1$ vì $IH // CC_1$

do đó $HI \perp (P)$ vì $(P) \perp (SAC)$ và giao tuyến của chúng là AC_1.

Kẻ It song song với B_1D_1, từ B kẻ đường thẳng song song với HI cắt It tại J thì $BJ \perp (P)$, từ đó $\widehat{BAJ}$ là góc giữa BA và (P)

$$\text{Ta có } \sin\widehat{BAJ} = \frac{BJ}{BA} = \frac{HI}{BA} = \frac{\frac{1}{2}CC_1}{BA} = \frac{\frac{1}{4}SC}{BA} = \frac{\frac{1}{4}a\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

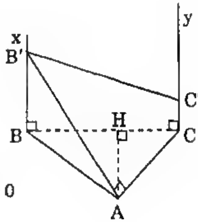
Vậy góc giữa BA và (P) là α mà $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Hai tia Bx và Cy cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Trên Bx, Cy lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho BB' = a, CC' = m.

a) Với giá trị nào của m thì AB'C' là tam giác vuông?

b) Khi tam giác AB'C' vuông tại B', kẻ $AH \perp BC$. Chứng minh rằng B'C'H là tam giác vuông và tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'C').

Giải



Ta có do AB = a, BC = 2a, BB' = a, CC' = m

$\Rightarrow \quad AC^2 = 3a^2, AB'^2 = 2a^2, AC'^2 = 3a^2 + m^2$

$B'C'^2 = 4a^2 + (m - a)^2$

a) Tam giác AB'C' vuông ở A

$\Leftrightarrow \quad 5a^2 + m^2 - 2ma = 2a^2 + 3a^2 + m^2$

$\Leftrightarrow \quad 2ma = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Vậy tam giác AB'C' vuông ở A khi và chỉ khi m = 0

• Tam giác AB'C' vuông ở C'

$\Leftrightarrow 2a^2 = 3a^2 + m^2 + 4a^2 + (m - a)^2$

Điều này vô lý (không xảy ra)

• Tam giác AB'C' vuông ở B' $\Leftrightarrow 2a^2 + 4a^2 + (m - a)^2 = 3a^2 + m^2$

$\Leftrightarrow m = 2a$

Vậy tam giác ABC vuông ở B $\Leftrightarrow$ m = 2a.

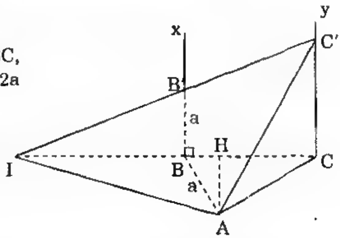
b) Giả sử tam giác AB'C' vuông ở B', tức là m = 2a

vì $AH \perp BC$ nên $BH.BC = AB^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad BH = \frac{a}{2} \Rightarrow HC = \frac{3a}{2}$ và

$B'H^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$; $C'H^2 = \frac{9a^2}{4} + 4a^2 = \frac{25a^2}{4}$; $B'C'^2 = 5a^2$

Vậy $B'H^2 + B'C'^2 = C'H^2$ tức là tam giác $B'C'H$ vuông tại B'.



• Ta tính góc giữa (ABC) và (AB'C'). Khi m = 2a

Gọi I là giao điểm của B'C' với BC, do B'B // CC', BB' = a, CC' = 2a nên BC = BI, B'C' = B'I

Xét phép chiếu lên (ABC). Ta có tam giá AIC là hình chiếu của tam giác AIC', Gọi φ là góc giữa (ABC) và (AB'C') thì:

$S_{\Delta AIC} = S_{\Delta AIC'}.\cos\varphi$

Ta có $S_{\Delta AIC} = \dfrac{1}{2}IC.AH$. Mà $IC = 4a$, $AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Nên $S_{\Delta AIC} = \dfrac{1}{2}.4a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$

Mặt khác $S_{\Delta AIC'} = \dfrac{1}{2}IC'.AB' = \dfrac{1}{2}.2a\sqrt{5}.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{10}$

Từ đó $\cos\varphi = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{a^2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

Vậy góc giữa (ABC) và (AB'C') là φ trong đó $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

MỤC LỤC

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11
(Chương trình nâng cao)

Nguyễn Văn Lộc (Chủ biên)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896: (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung

Biên tập: TRẦN VĂN HÙNG

Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH – THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số 1L-127 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Công ty In Hưng Phú
Số xuất bản: 345-2009/CXB/44-54/ĐHQGHN, ngày 24/4/2009
Quyết định xuất bản số: 127 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.